Til minde om min gode ven, kollega og forlægger Preben Frederiksen.

Jørgen Ebert

KOMPLEKSE TAL

- en historisk og aksiomatisk introduktion -

*»Jeg søgte en Methode, hvorved
de umuelige Operationer kunde
undgaaes«*

Caspar Wessel, 1799

Forlaget Minor

Komplekse tal - en historisk og aksiomatisk introduktion -
1. udgave, 1. oplag, 1995

Tryk: Toptryk, Gråsten
Printed in Denmark 1995
ISBN 87-984656-4-3

Forlaget Minor
v/Preben Frederiksen

Forord

Nærværende bog er skrevet med henblik på det valgfrie emne i matematik i gymnasiet og på HF. Den giver dels en *historisk* og dels en *aksiomatisk* introduktion til de komplekse tal. Ved denne kombination tydeliggøres to grundlæggende og meget forskellige matematiske arbejdsformer. Den ene er den, der fører fra de intuitive ideer frem til den færdige teori. I den anden begynder man med den færdige teori, som så underkastes en præcis matematisk analyse. De to arbejdsformer støtter og supplerer hinanden, og ingen af dem kan undværes. Legemesbegrebet fungerer som deres fælles baggrund.

Til den historiske introduktion benyttes en enestående matematisk afhandling fra 1797, hvori den dansk-norske landmåler *Caspar Wessel* som den første i verden gav de komplekse tal en logisk holdbar geometrisk og algebraisk repræsentation. Et uddrag af denne meget læseværdige afhandling gennemgås i detaljer og findes gengivet i appendiks.

Det har ikke været min hensigt at give en fuldstændig redegørelse for de komplekse tals historie. Læseren skal heller ikke forvente at stifte bekendtskab med de mangfoldige teoretiske og praktiske anvendelser. En dækning af disse områder ligger uden for bogens rammer og ville desuden tilsløre den overordnede idé. Bogens *øvelser* begrænser sig det rent algebraiske.

Hvis bogen benyttes til klasseundervisning, kan jeg anbefale *højtlæsning* og små *elevforedrag* som gode og effektive midler til at komme igennem de lidt vanskeligere dele af teksten. Højtlæsning er en gammeldags og ofte ugleset pædagogisk metode, som efter min mening fortjener en renæssance. Ved at lade eleverne læse op af bogen, er man ikke alene sikker på, at de faktisk får læst teksten, men de bliver også mere fortrolige med de svære matematiske vendinger, og læreren har mulighed for ved hyppige afbrydelser at diskutere indholdet af det læste med eleverne, mens det endnu står i frisk erindring.

Materialet til bogen har i forskellige udformninger været brugt dels ved Matematiklærerforeningens regionalkurser og dels som valgfrit emne på Amtsgymnasiet i Sønderborg. I denne sammenhæng vil jeg at rette en varm tak til min kollega, lektor Thomas Broue Jensen, for hans opmuntrende interesse for emnets matematiske og pædagogiske aspekter og for hans hjælp med at afprøve teksten i den praktiske undervisning.

Desuden vil jeg takke alle, som har bidraget med litteratur og frugtbare samtaler. Af disse vil jeg navnlig fremhæve lektor Christian Thybo, Thisted, magister Henrik Meyer, Birkerød, universitetslektor Kirsti Andersen, Århus, lektor Flemming Jørgensen, Næstved, Det Kongelige Bibliotek, København, og - ikke mindst - min forlægger og kollega, lektor Preben Frederiksen, Sønderborg, som har ansporet mig til bogens færdiggørelse, og som har fanget en del fejl i manuskriptet.

Sønderborg i maj 1995
Jørgen Ebert

Indholdsfortegnelse

I. Tallenes udvikling

Tallene er alle tings væsen, sagde Pythagoras. Han mente, at vejen til sjælens frigørelse lå i et studium af de talmæssige forhold, som gør naturen til et harmonisk kosmos. Selv om vi nu til dags - cirka 2500 år senere - nok ikke ville udtrykke os helt på denne måde, må vi indrømme, at tallene spiller en væsentlig rolle for vores forståelse af verden. Vi har opnået så stor fortrolighed med dem, at vi er tilbøjelige til at betragte dem som evige og naturgivne. Men den opfattelse er forkert.

Ideen om tallene er skabt af mennesker, som gennem årtusinder har forbedret regnekunsten. Den mest betydningsfulde drivkraft har været skiftende kulturers forsøg på at forklare naturens forskelligartede fænomener som for eksempel årstidernes rytme og månens bevægelser. Men også rent praktiske gøremål har inspireret. Oldtidsbonden har haft brug for at holde styr på antallet af husdyr, og søfareren behøvede en vis form for navigation.

Alle disse aktiviteter involverede beregninger, som blev mere og mere avancerede i takt med naturvidenskabernes udvikling. Når kravene til tallenes anvendelighed steg, måtte man udvide og forbedre forældede talsystemer. De reelle tal bør derfor betragtes som en kulturel frembringelse, der har været undervejs, siden de første civilisationer opstod.

Historien slutter ikke med de reelle tal. For kun et par hundrede år siden lykkedes det at udvide dem, så vi i dag har en endnu mere anvendelig talstruktur til rådighed - de komplekse tal. Følgende oversigt fremhæver i stærkt forenklet form nogle af hovedpunkterne i tallenes regnemæssige udvikling frem mod de komplekse tal.

De naturlige tal

Den mest primitive af de sædvanlige talmængder er mængden af naturlige tal:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

De kaldes også tælletallene, fordi det er dem, man bruger, når man tæller. Men de kan også i begrænset udstrækning bruges til aritmetiske operationer. De naturlige tal er stabile over for addition og multiplikation i den forstand, at såvel summen som produktet af to naturlige tal altid er et naturligt tal. Men stabiliteten er langt fra tilstrækkelig til at sikre, at alle additive eller multiplikative problemstillinger kan løses inden for mængden af de naturlige tal. Et så simpelt problem som »Hvis jeg lægger 5 kroner til min formue, har jeg 3 kroner. Hvor stor er min formue?« har ingen løsning. Med andre ord: der findes ikke noget naturligt tal x, som tilfredsstiller ligningen $5 + x = 3$. Heller ikke ligningen $5 + x = 5$ har nogen løsning.

De hele tal

For at kunne løse alle ligninger af formen $a + x = b$ er det nødvendigt at udvide talmængden til også at omfatte nul og de negative hele tal. Dermed har vi mængden af alle de hele tal:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

De hele tal er - ligesom de naturlige - stabile over for addition og multiplikation, og man kan løse alle additive ligninger inden for denne mængde. Men de multiplikative problemstillinger kniber det stadig med. Eksempelvis har problemet »Fem personer har delt tre kager. Hvor meget fik de hver?« ingen løsning. Det er det samme som at sige, at ligningen $5 \cdot x = 3$ ikke tilfredsstilles af noget helt tal.

De rationale tal

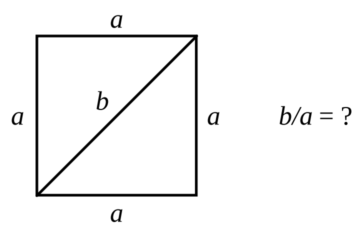
Man kan kun løse alle ligninger af typen $a \cdot x = b$ med $a \neq 0$, såfremt man udvider talmængden til også at omfatte alle brøker med heltallig tæller og nævner. Denne mængde kaldes de rationale tal:

$$Q = \{\tfrac{b}{a} \mid a \in Z \wedge b \in Z \wedge a \neq 0\}.$$

De rationale tal indeholder de hele tal, thi et vilkårligt helt tal kan opfattes som en brøk med nævneren 1. Med denne udvidelse er man, foruden de additive ligninger, også i stand til at løse alle ligninger af formen $a \cdot x = b$, når blot $a \neq 0$. Næsten alle praktiske regneopgaver kan løses uden at forlade de rationale tal. Lommeregnere og computere klarer sig endda med en ganske lille del af de rationale tal, nemlig dem, der kan skrives som endelige decimalbrøker med et bestemt maksimalt antal betydende cifre.

De reelle tal

Den næste udvidelse var dramatisk. Man opdagede, at forholdet mellem længderne af to liniestykker ikke altid kan angives ved hjælp af et rationalt tal. Sådanne liniestykker kaldes inkommensurable, og deres forhold siges at være irrationalt. Allerede 300 år f. Kr. kendtes et bevis for, at forholdet mellem diagonalen og en af siderne i et kvadrat er irrationalt (hvad er dette forhold?).



Opdagelsen af de inkommensurable størrelser øvede en gennemgribende indflydelse på erkendelsesfilosofien. Man havde hidtil været overbevist om, at alle naturens fænomener kunne udtrykkes ved hjælp af simple rationale tal, og at verden i hele sit væsen var rational. I oldtidens Grækenland havde medlemmerne af den navnkundige Pythagoræiske Skole viet hele deres liv til studiet af den guddommelige natur set i lyset af de rationale tal. Tallenes utilstrækkelighed kom som et chok for disse mennesker. Overleveringen siger, at guderne lod pythagoræeren Hippasos omkomme ved et frygteligt skibsforlis, fordi han med sin opdagelse af de inkommensurable størrelser kom dem for nær. Nogle hemmeligheder er forbeholdt guderne.

Opdagelsen var den direkte årsag til en total omlægning af den kurs, den græske matematik hidtil havde fulgt. Man måtte indrømme, at geometrien åbenbart var mere fuldkommen end tallene, thi geometrien kunne jo fremvise længder, som ikke kunne udtrykkes ved noget tal. Som konsekvens heraf helligede man sig geometrien. Det førte i øvrigt til et yderst frugtbart arbejde, som resulterede i den klassiske geometri, der har holdt sig næsten uændret frem til vor tid.

De reelle tal, *R*, indeholder foruden de rationale tal også de irrationale. Dermed har man fået lukket de sidste huller på talaksen. Til ethvert punkt på talaksen svarer et reelt tal, og til ethvert reelt tal svarer et punkt på talaksen. Det teoretiske grundlag for de reelle tal har været et virkeligt stort problem, som først er blevet løst på tilfredsstillende måde i nyere tid.

Inden for de reelle tal er man i stand til at udtrykke længden af alle rette liniestykker og andre geometriske størrelser som for eksempel forholdet π mellem en cirkels omkreds og dens diameter. Desuden kan man inden for R løse alle ligninger af typen $x^n = a$, hvor $n \in N$ og $a \in R_+$. Det vil sige, man kan uddrage n'te-roden af alle positive tal. Men man kan ikke uddrage kvadratroden af negative tal, og dermed har ligningen $x^2 + 1 = 0$ ingen løsning. Det skyldes, at x^2 altid - uanset værdien af x - er større end eller lig med 0. Altså vil $x^2 + 1$ altid være større end eller lig med 1, og derfor kan $x^2 + 1$ aldrig være 0. Der er mange af den slags ligninger, som ikke kan løses, og man har efterhånden affundet sig med, at »sådan er det bare«. Når man for eksempel skal løse en andengradsligning, beregner man først dens diskriminant. Hvis denne er negativ, er der ikke noget at gøre: ligningen har ingen løsning.

De komplekse tal

Det ville lette mange beregninger, hvis det var tilladt at uddrage kvadratroden af -1. Belært af den allerede beskrevne udvikling, er det en nærliggende tanke at forsøge at udvide de reelle tal, således at $x^2 + 1 = 0$ kan løses. Ideen er i sig selv ikke mere revolutionerende end den, der førte til de hele tal. Men regnetraditionen har rødder langt tilbage i tiden, og den naturlige skepsis over for alt nyt har været svær at rokke på netop dette punkt. Derfor betragtedes ideen om at uddrage kvadratroden af -1 som næsten kættersk.

Nogle kritikere argumenterede med, at talaksen jo allerede var helt fuld af tal, så hvor skulle man finde plads til $\sqrt{-1}$? Andre var mere konkrete i deres kritik. For eksempel fremførte de, at hvis $\sqrt{-1}$ eksisterede, ville man kunne opstille følgende to modstridende regnestykker:

(1) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

(2) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}^2 = -1$

På trods af al skepsis og alle indvendinger har det dog vist sig både muligt og yderst anvendeligt at udvide talbegrebet. De komplekse tal, C, repræsenterer en udvidelse af de reelle tal, hvori ethvert polynomium af mindst første grad har et nulpunkt. Derfor har specielt ligningen $x^2 + 1 = 0$ en løsning, og derfor har det god mening at tale om $\sqrt{-1}$. Hvad de komplekse tal er for nogle størrelser, og hvordan man regner med dem, vil fremgå lidt efter lidt af de følgende kapitler.

II. Talstrukturer og legemer

I foregående kapitel har vi set en stadigt voksende følge af talmængder:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Udvidelserne har hver gang været begrundet med ønsket om at kunne udføre flere og mere avancerede beregninger.

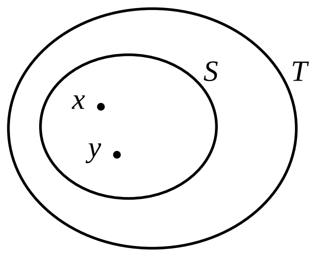
Talstrukturer

Til hver af de nævnte talmængder er knyttet to regningsarter, nemlig addition og multiplikation. Generelt defineres en *regneoperator* i en mængde som en forskrift, der til ethvert ordnet par af elementer i mængden knytter et element i mængden. Addition og multiplikation er altså eksempler på regneoperatorer.

En struktur bestående af en mængde M med regneoperatorerne addition og multiplikation vil vi for kortheds skyld kalde en *talstruktur*. For at symbolisere samhørigheden mellem mængden og de to regneoperatorer, skrives talstrukturen som $(M,+,\cdot)$. De fire almindeligt kendte talstrukturer er:

$$(N,+,\cdot), (Z,+,\cdot), (Q,+,\cdot) \text{ og } (R,+,\cdot).$$

En talstruktur $(T,+,\cdot)$ siges at være en *udvidelse* af talstrukturen $(S,+,\cdot)$, såfremt S er en delmængde af T, og såfremt summen og produktet af to vilkårlige elementer x og y i S ikke ændres, dersom man opfatter dem som elementer i T.



For eksempel er $(Z,+,\cdot)$ en udvidelse af $(N,+,\cdot)$, fordi N er en delmængde af Z, og fordi hverken summen eller produktet af to naturlige tal ændres, dersom man tænker på tallene som hele tal. Hvis de naturlige tals og de hele tals regneoperatorer ikke stemte overens på denne måde, kunne $3+5$ give forskellige resultater afhængigt af, om man opfattede 3 og 5 som naturlige tal eller som hele tal. En sådan konflikt ville være vanskelig at håndtere og bør naturligvis undgås. De ovenfor nævnte fire almindeligt kendte talstrukturer udgør en kæde af udvidelser, som begynder med $(N,+,\cdot)$ og slutter med $(R,+,\cdot)$.

Når man udvider en talstruktur, bør man bestræbe sig på at bevare formler og regneregler i størst muligt omfang. Gennem lang tids anvendelse er de gamle regler godt indarbejdet, og man føler sig tryg ved at bruge dem. Inden vi kaster os ud i en udvidelse af de reelle tal, er det derfor nødvendigt at få et godt overblik over de regneregler, der gælder for de reelle tal. Der er som bekendt i tusindvis af sådanne regler. Eksempelvis kan nævnes:

- Formlen for kvadratet på en to-leddet størrelse.

- Nulreglen.
- Faktorernes orden er ligegyldig.
- Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte.
- Den distributive lov.

Det kan synes ganske uoverkommeligt at skabe et overblik over *alle* formler og regneregler. Men heldigvis findes der en fiks udvej. En nærmere undersøgelse viser nemlig, at reglerne ikke er totalt uafhængige af hinanden. Nogle af reglerne kan man lade ude af betragtning, fordi de kan udledes af de andre. Blandt de resterende kan man måske igen udelade nogle og så videre. Efterhånden kan man få kogt regelsættet ned til et koncentrat omfattende ganske få regler, hvoraf alle de øvrige kan udledes. Et sådant basalt regelsæt kaldes et *aksiomsystem* (aksiom = grundsætning). Et aksiomsystem kan - lidt poetisk - sammenlignes med et frø, som i stærkt koncentreret form gemmer på alle egenskaberne hos den færdige plante. Hvis man kan bevise, at en eventuel udvidelse af de reelle tal - for eksempel de komplekse tal - opfylder de få aksiomer, kan man også være sikker på, at udvidelsen opfylder alle de øvrige regler, thi disse kan jo udledes af aksiomerne.

Aksiomsystemet for et legeme

De reelle tals regneregler kan udtyndes til kun seks aksiomer, hvoraf alle øvrige regler kan udledes. Enhver talstruktur, som opfylder disse seks aksiomer, har de samme regnemæssige egenskaber som de reelle tal, fordi egenskaberne er fuldstændigt fastlagt af aksiomerne. Sådanne talstrukturer kaldes legemer. De reelle tal er altså per definition et legeme - men ikke det eneste.

Mere præcist siges en talstruktur $(M,+,\cdot)$ at være et *legeme*, såfremt følgende seks aksiomer er opfyldt:

Aksiom 1. *M* er *stabil* over for addition og multiplikation:

$$\forall x,y \in M\colon x+y \in M$$

$$\forall x,y \in M\colon x\cdot y \in M$$

Aksiom 2. Addition og multiplikation er *kommutative* operatorer:

$$\forall x,y \in M\colon x+y = y+x$$

$$\forall x,y \in M\colon x\cdot y = y\cdot x$$

Aksiom 3. Addition og multiplikation er *associative* operatorer:

$$\forall x,y,z \in M\colon (x+y)+z = x+(y+z)$$

$$\forall x,y,z \in M\colon (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

Aksiom 4. Multiplikation er *distributiv* med hensyn til addition:

$$\forall x,y,z \in M\colon x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$$

Aksiom 5. *M* indeholder et *nulelement n* og et *ételement e*, som er forskellige, og som er *neutrale* over for henholdsvis addition og multiplikation:

$$\forall x \in M\colon x+n = x$$

$$\forall x \in M\colon x\cdot e = x$$

Aksiom 6. Ethvert element i *M* har et *modsat* element i *M*, og ethvert element i *M*, som ikke er et nulelement, har et *reciprokt* element i *M*:

$$\forall x \in M\ \exists y \in M\colon x+y = n$$

$$\forall x \in M \setminus \{n\}\ \exists y \in M\colon x\cdot y = e$$

Det første aksiom - det om stabiliteten - sikrer, at hverken addition eller multiplikation kan føre til resultater, som ligger uden for mængden *M*. Dette aksiom kan i virkeligheden godt undværes, da definitionen af en regneoperator i sig selv sikrer stabiliteten. Aksiomet er taget med af praktiske grunde.

De tre næste aksiomer indeholder de klassiske love: de kommutative, de associative og den distributive lov. Bemærk, at der er en kommutativ og en associativ lov for hver af de to regneoperatorer, hvorimod der kun er én distributiv lov, som til gengæld knytter de to regneoperatorer sammen.

De sidste to aksiomer sikrer eksistensen af visse elementer i *M*. Bemærk, at aksiomerne kun udtaler sig om *eksistensen* og ikke om *entydigheden*. På forhånd kan man altså ikke udelukke, at et legeme kan være i besiddelse af flere forskellige nulelementer eller ételementer. Ligeledes kan man heller ikke på forhånd udelukke, at et element i et legeme kan have flere forskellige modsatte eller reciprokke elementer. Ved en nøjere undersøgelse af aksiomerne kan man dog fastslå, at flertydigheder af denne art er umulige. Aksiomsystemet sikrer implicit entydigheden, hvilket bevises i det følgende. Men indtil da er vi nødt til at omtale disse elementer i ubestemt form: vi siger for eksempel *et nulelement* i stedet for *nulelementet*.

Hverken $(N,+,\cdot)$ eller $(Z,+,\cdot)$ er legemer. De naturlige tal mangler blandt andet et nulelement, og inden for de hele tal er det kun 1 og -1, der har reciprokke elementer. Disse to talstrukturer må derfor siges af være regneteknisk utilstrækkelige.

Men både $(Q,+,\cdot)$ og $(R,+,\cdot)$ er legemer. Regnereglerne for de rationale tal er altså præcis de samme som for de reelle tal. Forskellen mellem de to talstrukturer er - som nævnt på side 6 - at de reelle tal er mere fuldstændige end de rationale, forstået på den måde at de udfylder hele talaksen. Det er netop denne egenskab, der gør det muligt at udtrykke alle geometriske længder ved hjælp af reelle tal. Dette er ikke tilfældet med de rationale tal. På en »rational talakse« er der i en vis forstand flere »huller«, end der er tal. For eksempel mangler $\sqrt{2}$ og π. Sådanne huller umuliggør en kontinuert ændring af en rational variabel. Derfor kan man ikke nøjes med de rationale tal, når man arbejder med analytisk geometri eller med begreber som grænseværdi, kontinuitet eller differentiabilitet.

Egenskaber ved et legeme

Det fremgår af det foregående, at i et vilkårligt legeme gælder de samme regneregler som dem, man kender fra regning med sædvanlige reelle tal. I dette afsnit skal vi se nogle få eksempler på, hvorledes disse velkendte regler kan udledes af de seks aksiomer.

Man kan synes, at beviserne er ret pedantiske, men det skal de være. Man må ikke glemme, at på det niveau, vi arbejder, kan vi ikke tillade os at benytte den erfaring, vi har fra den daglige regning. For det første er vi jo netop i færd med at bevise, at de metoder, vi kender fra hverdagen, er korrekte. For det andet arbejder vi med et totalt abstrakt legeme, om hvilket vi intet véd, udover at de seks aksiomer gælder. Vi må forestille os, at vi er strandet på en øde ø kun medbringende seks stykker værktøj - de seks aksiomer. Ved hjælp af disse - og kun disse - er det vores opgave at udvikle de kendte regneregler.

Ifølge bemærkningerne på side 10 om eksistens og entydighed er det ikke på forhånd udelukket, at der kan være mere end ét nulelement eller mere end ét ételement i et legeme. Nedenstående sætning viser imidlertid, at aksiomsystemet implicit sikrer entydigheden af disse elementer.

Sætning
Et vilkårligt legeme har netop ét nulelement og netop ét ételement.

Bevis: Lad $(M,+,\cdot)$ være et vilkårligt legeme. Ifølge aksiom 5 har *M mindst* ét nulelement. Antag nu, at n_1 og n_2 er to nulelementer i *M*. Så fås:

$$\begin{aligned} & n_1 \\ & = n_1 + n_2 \quad (n_2 \text{ er neutral over for addition}) \\ & = n_2 + n_1 \quad (\text{den kommutative lov}) \\ & = n_2 \quad (n_1 \text{ er neutral over for addition}) \end{aligned}$$

Dette viser, at M *højst* har ét nulelement. Derfor har M *netop* ét nulelement. På samme måde bevises, at M har netop ét ètelement. Hermed er sætningen bevist.

Efter denne entydighedssætning kan vi tillade os at omtale et legemes nulelement og ételement i bestemt form, og vi kan give disse elementer faste navne uden fare for misforståelse.

Definition
Det entydigt bestemte nulelement i et legeme betegnes med 0, og det entydigt bestemte ételement betegnes med 1.

Den næste sætning beviser entydigheden af modsatte og reciprokke elementer til elementer i et legeme.

Sætning
Ethvert element i et legeme har netop ét modsat element, og ethvert element forskelligt fra 0 har netop ét reciprokt element.

Bevis: Lad $(M,+,\cdot)$ være et vilkårligt legeme og lad x være et vilkårligt element i M. Ifølge aksiom 6 har x *mindst* ét modsat element i M. Antag, at y_1 og y_2 er to modsatte elementer til x i M. Så gælder:

$$\begin{aligned} & y_1 \\ & = y_1 + 0 \quad (0 \text{ er neutral over for addition}) \\ & = y_1 + (x + y_2) \quad (y_2 \text{ er det modsatte element til } x) \\ & = (y_1 + x) + y_2 \quad (\text{den associative lov}) \\ & = (x + y_1) + y_2 \quad (\text{den kommutative lov}) \\ & = 0 + y_2 \quad (y_1 \text{ er det modsatte element til } x) \\ & = y_2 + 0 \quad (\text{den kommutative lov}) \\ & = y_2 \quad (0 \text{ er neutral over for addition}) \end{aligned}$$

Dette viser, at x *højst* har ét modsat element i M. Derfor har x *netop* ét modsat element i M. På tilsvarende måde bevises, at et vilkårligt element i $M \setminus \{0\}$ har netop ét reciprokt element i M. Hermed er sætningen bevist.

Ifølge ovenstående sætning kan vi tillade os at tale om *det* modsatte element og *det* reciprokke element til et element i et legeme, og vi kan give disse elementer faste navne.

Definition
Det entydigt bestemte modsatte element til et element x i et legeme betegnes med $-x$. Hvis $x \neq 0$, betegner $1/x$ og $\frac{1}{x}$ og x^{-1} det entydigt bestemte reciprokke element til x.

Da $(Q,+,\cdot)$ og $(R,+,\cdot)$ er legemer, og da anvendelsen af disse talstrukturer har en lang tradition, har der naturligt nok udviklet sig en del forkortede - og lidt sjuskede - skrivemåder, som med fordel kan overføres til et vilkårligt legeme. Specielt kan man i kraft af den associative lov tillade sig at undlade parenteser i rent additive og i rent multiplikative udtryk:

$$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Desuden lader man ofte multiplikationstegn og parenteser om rent multiplikative udtryk være underforståede:

$$xy + zu = (x \cdot y) + (z \cdot u).$$

Visse parenteser kan dog *ikke* undværes. Dette gælder for eksempel parenteserne i udtrykkene:

$$x(y+z)u \text{ og } (x+y)(z+u).$$

Hvis alle addender i et rent additivt udtryk er ens, eller hvis alle faktorer i et rent multiplikativt udtryk er ens, benyttes de forkortede skrivemåder:

$$nx = x + x + \ldots + x \quad (n \text{ addender})$$
$$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad (n \text{ faktorer})$$

I udtryk, hvori indgår modsatte eller reciprokke elementer, bruges skrivemåderne:

$$x - y = x + (-y)$$
$$\frac{x}{y} = x \cdot (1/y) = x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot (y^{-1})$$

Bemærk, at man med disse skrivemåder kan opfatte *subtraktion* som en regneoperator i *M*, og *division* som en regneoperator i $M \setminus \{0\}$. Disse operatorer siges at være *afledt* af henholdsvis addition og multiplikation.

Sætning
I et vilkårligt legeme $(M,+,\cdot)$ gælder følgende regneregler:

(1) $\forall x \in M: \quad x \cdot 0 = 0$

(2) $\forall x \in M: \quad (-1) \cdot x = -x$

(3) $\forall x, y \in M: \quad x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

(4) $\forall x, y \in M: \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Bevis for (1): Lad *x* være et vilkårlige element i *M*, og lad *a* betegne elementet $x \cdot 0$. Vi skal så blot bevise, at $a = 0$. Dette gøres ved hjælp af følgende mellemregning:

$$\begin{aligned}
& a \\
&= x \cdot 0 && (\text{definitionen af } a) \\
&= x \cdot (0 + 0) && (0 \text{ er nulelementet}) \\
&= x \cdot 0 + x \cdot 0 && (\text{den distributive lov}) \\
&= a + a && (\text{definitionen af } a)
\end{aligned}$$

Altså er $a = a + a$. Da *a* er et element i legemet *M*, eksisterer det modsatte element til *a* i *M*. Derfor kan vi addere $-a$ på begge sider af ligningen:

$$\begin{aligned}
& a = a + a \\
& \Rightarrow a + (-a) = (a + a) + (-a) && (\text{addition af } -a) \\
& \Rightarrow 0 = (a + a) + (-a) && (-a \text{ er modsat til } a) \\
& \Rightarrow 0 = a + (a + (-a)) && (\text{den associative lov}) \\
& \Rightarrow 0 = a + 0 && (-a \text{ er modsat til } a) \\
& \Rightarrow 0 = a && (0 \text{ er nulelementet})
\end{aligned}$$

Hermed er (1) bevist.

Bevis for (2): Lad *x* være et vilkårligt element i *M*. Vi skal så blot bevise, at $(-1)\cdot x$ er det modsatte element til *x*, altså at $x+(-1)\cdot x=0$. Beviset forløber således:

$$\begin{aligned}
& x+(-1)\cdot x \\
& = x + x\cdot(-1) && (\text{den kommutative lov}) \\
& = x\cdot 1 + x\cdot(-1) && (1 \text{ erételementet }) \\
& = x\cdot(1+(-1)) && (\text{den distributive lov}) \\
& = x\cdot 0 && (-1 \text{ er det modsatte element til } 1) \\
& = 0 && (\text{bevist i } (1))
\end{aligned}$$

Hermed er (2) bevist.

Bevis for (3): Lad *x* og *y* være vilkårlige elementer i *M* og antag, at $x\cdot y=0$. Vi skal så blot bevise, at $x=0 \vee y=0$. Hvis $y=0$ er vi færdige. Vi kan derfor antage, at $y\neq 0$, hvorefter vi skal bevise, at $x=0$. Da $y\neq 0$, eksisterer det reciprokke element y^{-1} til *y*. Heraf følger:

$$\begin{aligned}
& x\cdot y=0 \\
& \Rightarrow (x\cdot y)\cdot y^{-1} = 0\cdot y^{-1} \\
& \Rightarrow x\cdot(y\cdot y^{-1}) = y^{-1}\cdot 0 \\
& \Rightarrow x\cdot 1 = 0 \\
& \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Hermed er (3) bevist. Det overlades til læseren at gøre rede for hvert enkelt trin i beviset.

Bevis for (4): Lad *x* og *y* være vilkårlige elementer i *M*. Så gælder:

$$\begin{aligned}
& (x+y)^2 \\
& = (x+y)(x+y) \\
& = (x+y)x + (x+y)y \\
& = x(x+y) + y(x+y) \\
& = xx + xy + yx + yy \\
& = x^2 + xy + xy + y^2 \\
& = x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}$$

Hermed er (4) bevist. Igen overlades det til læseren at gøre rede for hvert enkelt trin i beviset. Dette afslutter beviset for sætningen.

De regneregler, der er bevist i ovenstående sætning, gælder i et vilkårligt legeme, altså ikke kun i $(Q,+,\cdot)$ og i $(R,+,\cdot)$, men også i ethvert fremtidigt legeme. Sætningen er på ingen måde udtømmende men er blot ment som en illustration af, at man med en passende portion flid vil være i stand til at genskabe alle de sædvanlige regneregler ud fra de seks aksiomer.

Det er forbavsende, at kun seks aksiomer er nødvendige. Ved at bevise, at de få aksiomer gælder i en talstruktur, har man samtidig bevist, at *alle* de gamle regneregler gælder, og man véd, at man kan regne med de nye tal, ganske som man er vant til.

Det skal dog nævnes, at aksiomsystemet *kun* beskriver de rent regnemæssige egenskaber ved et legeme. De reelle tal har andre egenskaber end dem, der følger af aksiomsystemet. For eksempel er de reelle tal underlagt en ordning, således at ethvert par af reelle tal, *x* og *y*, opfylder netop ét af udsagnene $x<y, x=y, x>y$. Ordningen af de reelle tal er knyttet tæt sammen med regneoperatorerne. For eksempel gælder:

$$\forall x, y \in R: x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$
$$\forall x, y \in R: x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$$

og

$$\forall x \in R: x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

Imidlertid er det ikke muligt at definere en ordning i et vilkårligt legeme, for eksempel ikke i de komplekse tal.

Øvelser

Øvelse 1
Bevis, at følgende regler er gyldige i et vilkårligt legeme $(M, +, \cdot)$:

a) $\forall x, y, z \in M: x + z = y + z \Rightarrow x = y$

b) $\forall x, y \in M \; \forall z \in M \setminus \{0\}: xz = yz \Rightarrow x = y$

c) $\forall a \in M \setminus \{0\} \; \forall b \in M \; \exists x \in M: ax + b = 0$

d) $\forall x \in M: -(-x) = x$

e) $\forall x \in M \setminus \{0\}: (x^{-1})^{-1} = x$

f) $\forall x, y \in M: (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Øvelse 2
Det virker lidt irriterende, at man ved division ustandselig skal udelukke 0 som divisor. Derfor kunne det være rart at finde et tallegeme, hvori division med 0 var tilladt. Men det kan man godt opgive. Der findes nemlig ikke noget legeme, hvori 0 har et reciprokt element. Bevis dette.

Hint: Beviset kan føres indirekte ved at antage, at M er et legeme, hvori 0 har et reciprokt element a. Bevis derefter, at under disse forudsætninger er $0 = 1$, og opnå derved en modstrid med aksiom 5.

Øvelse 3
Undersøg, om addition er distributiv med hensyn til multiplikation i $(R, +, \cdot)$.

Øvelse 4
Lad K betegne mængden $\{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a \in Q \wedge b \in Q\}$.

a) Bevis, at når K udstyres med den sædvanlige reelle addition og den sædvanlige reelle multiplikation, så er $(K, +, \cdot)$ et legeme.

b) Bevis, at $Q \subset K \subset R$, og at $(K, +, \cdot)$ er en udvidelse af $(Q, +, \cdot)$.

Hint: Man kan bevise, at et vilkårligt element $a + \sqrt{2} \cdot b$ i K har et reciprokt element i K ved at bevise, at ligningen $(a + \sqrt{2} \cdot b)(x + \sqrt{2} \cdot y) = 1$ har rationale løsninger, såfremt $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Dette kan gøres ved at omskrive ligningen til to ligninger med to ubekendte og derefter bevise, at ligningssystemets determinant ikke er nul.

III. Caspar Wessel

Den første, der gav en logisk holdbar fremstilling af de komplekse tal, var den dansk-norske landmåler Caspar Wessel. Nærværende kapitel forsøger dels at tegne et billede af personen Caspar Wessel og dels at give en beskrivelse af hans samtid og nogle af de ideer, der dengang var fremherskende.

Caspar Wessels samtid

Caspar Wessel, 1745-1818, er født i Norge, som på den tid var underlagt det dansk-norske riges enevældige styre med hovedstad i København. At efternavnet lyder bekendt skyldes dels hans grandonkel, søhelten Peter Wessel, som bar adelsnavnet Tordenskiold, og dels hans bror, digteren Johan Herman Wessel.

Perioden - den sidste halvdel af 1700-tallet - kaldes *oplysningstiden*. Forholdene i den vestlige verden var præget af store omvæltninger, hvoraf den nordamerikanske frihedskrig og den franske revolution hører til de mere dramatiske. Et ændret menneskesyn og en ny samfundsopfattelse stillede krav om borgerrettigheder, frihed og lighed. Alle gamle ideer blev gjort til genstand for kritisk vurdering, og store dele af Europa kom ind i en voldsom kulturel udvikling med nytænkning inden for en lang række områder: teater, litteratur, matematik, fysik, kemi, filosofi, religion, statslære og økonomi.

Disse strømninger nåede også Danmark. Forud lå næsten hundrede års enevælde præget af blind lydighed over for Luthers ortodoksi og den enevældige konge. Den almindelige befolknings holdning havde hidtil været, at hvad Den Lille Katekismus ikke kunne forklare, skulle man ikke spekulere over. Alligevel demonstrerede videnskaben flere gange gennem de sidste par hundrede år, at den faktisk var i stand til at forklare nogle af naturens fænomener ud fra almengyldige naturlove. Det bedste eksempel herpå er Newtons *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* fra 1687, som blandt andet indeholder lovene for den klassiske mekanik og for massetiltrækningen. Sådanne resultater var med til - langt om længe - at skabe en ændret holdning og bane vejen for oplysningstanken - først i de store europæiske lande som Frankrig og Tyskland og senere i Danmark.

Oplysningstidens hovedidé var, at det måtte være muligt at frigøre sig fra gamle fordomme og falske autoriteter. Alene ved brug af den sunde fornuft ville man være i stand til at finde objektive sandheder. I stedet for at frygte og elske Gud burde man beundre Ham som den geniale konstruktør af naturens præcise urværk. Gud kommer ikke med varsler i form af lynild og jordskælv, thi derved ville han sætte sine egne naturlove over styr. I Holbergs komedie *Erasmus Montanus*, der havde premiere i 1747, påstår Jesper Ridefoged, at måneformørkelser varsler ulykke på Jorden. Men han modsiges af den unge diskussionslystne (og ret irriterende) student, Erasmus: »Det gaar altsammen naturlig viis til, thi man kan udregne Formørkelser.«

I slutningen af 1700-tallet - altså på Caspar Wessels tid - oplevede danskerne i kraft af den øgede sociale og kulturelle bevidsthed en række store omvæltninger. Blandt disse kan nævnes censurens ophævelse, gennemførelse af landboreformer, forbud mod slavehandel og stavnsbåndets opløsning. Det var også i de år, P. A. Heiberg dristede sig til at skrive »Ordener hænger man på idioter, stjerne og bånd man kun adelen gi'r« - men det kostede ham dog også en landsforvisning, hvilket var billigt sluppet set på baggrund af tidligere tiders gengældelsesforanstaltninger.

Landmåleren Caspar Wessel

Da Caspar Wessel i 1763 efter endt studentereksamen flyttede til København, blev han mødt af oplysningstidens kulturelle tøbrud. Han tog juridisk embedseksamen efter 15 års studier. Den lange studietid skyldtes at Caspar Wessel allerede året efter sin ankomst til København fik beskæftigelse som korttegner for Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Korttegningen blev Caspar Wessels livsgerning. Han avancerede hurtigt og høstede megen anerkendelse for sit omhyggelige arbejde. Hans storebror, digteren Johan Herman Wessel, som var af en ganske anden natur, skrev om ham:

> *Han tegner Landkaart og læser Loven.*
> *Han er saa flittig, som jeg er doven.*

At han har været flittig fremgår også af Caspar Wessels levnedsbeskrivelse fra 1815, hvori han blandt andet fortæller, hvad han lavede i sin studietid:

> *I den Tid fra 1768 til 1779 har jeg tegnet de 4 Fjerdedele af Sjelland, den østlige Halvdel af det generale Sjellandske Kaart, og Kaartet over den nordlige Del af Fyen, samt, foruden nogle enkelte Dele af Sjelland, opmaalt den østlige Halvdel af Fyen.*

Senere - efter endt juridisk embedseksamen - opmålte og kortlagde Caspar Wessel blandt andet Jylland, Slesvig, Holsten og hertugdømmet Oldenburg. Ofte klarede han det store opmålingsarbejde helt alene på trods af, at Videnskabernes Selskab gav ham penge med til betaling af lokal arbejdskraft. I et brev vedlagt et af sine nytegnede kort bad Caspar Wessel lederen af den danske opmåling, professor Thomas Bugge, om tilladelse til at beholde disse penge selv:

> *Jeg tager mig herved den Friehed at tilsende Deres Velbyrdighed mit Kort, og ynsker at det maatte finde Deres Biefald. Af Titelen kan sees at det er forfærdiget paa den Maade, at jeg ingen Dagleyere har haft fornøden at bruge.*
>
> *Jeg burde altsaa udbetale de Penge, som jeg til den Brug har oppebæret; men jeg stoler paa at Hr. Justitsraaden nu ligesom tilforn har den Godhed at eftergive mig denne Gield.*
>
> *I mine yngre Aar var min Gage saa liden, at jeg umuelig kunde leve deraf, og den Gield jeg den Gang paadrog mig, stræber jeg nu at betale, inden jeg afgaaer.*

Caspar Wessel har altså ikke levet noget slaraffenliv, og det hårde arbejde gik alvorligt ud over hans helbred. Den ovenfor nævnte levnedsbeskrivelse slutter således:

> *1812 blev jeg af Gigt saa svag, at jeg næppe kunde gaae, men Etatsraad Rosenvinge og hans Familie, som jeg er saa forbunden for deres mange beviste Velgjerninger, overtalede mig til at flytte ind til dem, og der blev jeg ved bedre Pleje, Lægemidlers Anskaffelse, og ved Etatsraad Bangs Hjelp, saavidt helbredt, at jeg til Nød i dette Foraar kunde tegne et trigonometrisk Skelet til de 4 ej endnu udgivne Kaarter over Holsten.*

I 1815 - tre år før sin død - fik Caspar Wessel Ridderkorset som belønning for sit store og trofaste arbejde med kortmålingen i Danmark.

Matematikeren Caspar Wessel

Caspar Wessel tog som nævnt juridisk embedseksamen. Han var hverken landmåler eller matematiker af uddannelse. Men arbejdet som landmåler bragte ham naturligvis i meget tæt kontakt med matematiske problemstillinger. En landmålers opgave er at opmåle længder og vinkler i landskabet og derefter udregne den nøjagtige placering af landskabets enkelte dele i et gradnet. Der er altså tale om geometriske beregninger, hvori hovedelementerne er rette liniestykker af forskellige længder og med forskellige retninger.

Caspar Wessel regnede liniestykker med fortegn. Hvis AB betegner liniestykket fra punkt A til punkt B, så er $-AB$ det samme liniestykke blot med modsat retning. Det vil sige $-AB = BA$. På samme måde er $3AB$ et liniestykke, som er tre gange så langt som AB og med samme retning. Liniestykket $-3AB$ er tre gange så langt som AB men har modsat retning.

Det ses, at man kan forandre et liniestykkes længde og retning ved multiplikation med passende reelle tal. Men det ses også, at denne form for linieregning desværre kun kan ændre et liniestykkes retning fra fremadrettet til bagudrettet og omvendt. Man kan dreje et liniestykke $180°$ ved at gange det med et negativt tal, men man kan ikke på samme måde dreje det $45°$. Begrænsningen skyldes naturligvis, at de tal, man kan gange rette liniestykker med, enten er positive, negative eller nul. Andre muligheder gives ikke.

Denne erkendelse af tallenes utilstrækkelighed gav Caspar Wessel ideen til at forsøge at udvide den almindelige opfattelse af tal og talregning. Og det lykkedes virkelig for Caspar Wessel at finde nogle nye tal, som er mere righoldige end de sædvanlige, og som kan bruges til at forandre liniestykkers længder og retninger på *alle* mulige måder. Disse tal hedder de komplekse tal, om end Caspar Wessel ikke selv brugte denne betegnelse.

I 1796 samlede Caspar Wessel sine resultater i en afhandling på et halvt hundrede sider, som året efter blev forelagt Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. I 1799 blev afhandlingen trykt i Videnskabernes Selskabs Skrifter. Dens fuldstændige titel er:

> *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. Af Caspar Wessel, Landmaaler.*

I sin levnedsbeskrivelse fra 1815 omtalte Caspar Wessel kortfattet sit arbejde med afhandlingen:

> *1796 fuldendte jeg de trigonometriske Operationer i Jylland, Slesvig og Holsten. I samme Aar skrev jeg en Afhandling, hvori jeg forsøgte at betegne rette Liniers Direktion ved analytiske Tegn, og anvendte disse til sphæriske og retlinede Polygoners Opløsning. Afhandlingen blev, etter Etatsraad Tetens's og Kapitainlieutenant Høyers gunstige Omdømme optaget i 5te Dels 3 H. af det Kongl. Vidensk. Selskabs Skrifter, trykte 1799.*

Afhandlingens kvalitet er beundringsværdig, også set med nutidens øjne. Den er resultatet af en midaldrende landmålers store interesse for sit fag. Det matematiske indhold angiver en elegant løsning på et problem, som udlandets store matematikere forgæves havde kæmpet med, nemlig at finde en konsistent geometrisk og algebraisk repræsentation af de komplekse tal. I afhandlingen beviste Caspar Wessel, at de sædvanlige regneregler, således som de kendes fra de reelle tal, også gælder for de komplekse. Desuden demonstrerede han gennem avancerede geometriske eksempler, hvorledes traditionelt vanskelige beregninger blev mere elegante, når de komplekse tal blev taget i anvendelse.

De komplekse tal kan bruges generelt til alle former for beregning, ikke kun de geometriske. Det var Caspar Wessel godt klar over, men for at skåne læseren for alt for abstrakte begreber, ville han holde sig til geometriske anvendelser. I afhandlingens indledning skrev Caspar Wessel:

> *Der gives endnu flere Størrelser end rette Linier, der kunne tage imod omtalte Relationer. Det var derfor ikke unyttigt, at forklare disse Relationer i Almindelighed, og at indlemme deres almindelige Begreb i Operationernes Forklaring; men da baade Kienderes Raad, dette Skrivts Indhold, og Foredragets*

Tydelighed fordre, ei at besvære Læseren med saa abstracte Begreb, befatter jeg mig kun med de geometriske Forklaringer alene, ...

Caspar Wessel havde nok regnet med, at de nye tal og deres regneregler ville blive mødt med skepsis fra professionelle matematikere. I nedenstående »forsvarstale« lagde Caspar Wessel derfor stor vægt på at forklare, at udvidelsen af talbegrebet og regneoperationerne ikke på nogen måde ændrede de sædvanlige regneregler. Det nye var blot, at regneoperationerne udstraktes til at omfatte flere tal end de reelle:

Man har uden Tvivl holdt det for utilladeligt at forandre noget i Operationernes eengang antagne Forklaring. Og derimod er intet at indvende, saalænge Forklaringen anvendes paa Størrelser i Almindelighed; men i enkelte Tilfælde, naar Størrelsernes egen Natur synes at indbyde til Operationernes nøiere Bestemmelse, og denne med Nytte kan anvendes, bør samme vel ei kaldes utilladelig; thi gaaer man fra Arithmetiken over til den geometriske Analysis, eller fra Operationer med abstracte Tal til dem med rette Linier, faaer man Størrelser at betragte, der vel kan tage imod samme, men ogsaa imod langt flere Relationer, end de, som Tallene kan have til hinanden; om man derfor nu tager Operationerne i en vidtløftigere Mening, og ei, som før, blot indskrænker dem til den Brug, at kunne foretages med Linier af samme eller modsat Retning, men udstrækker nu deres forrige indskrænkede Begreb noget videre, saa at det bliver anvendeligt, ei alene i samme Fald, som før, men ogsaa i uendelig mange flere Tilfælde; jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; men man udfører den kun videre, lemper sig efter Størrelsernes Natur, og iagttager den Methodens Regel, der fordrer, lidt efter lidt at giøre en vanskelig Lære fattelig. Det bliver altsaa ingen urimelig Fordring, at Operationerne anvendte i Geometrien tages i en vidtløftigere Mening, end den man i Regnekunsten gav dem; man vil ogsaa let tilstaae, at det paa den Maade maa være mueligt at frembringe uendelig mange Forandringer i Liniernes Retning.

Afhandlingen burde have givet Caspar Wessel international berømmelse, men sådan gik det ikke. Der var hverken begejstring for afhandlingen eller kritiske røster imod den. Den forventede debat udeblev fuldstændig - ingen synes at have bemærket den geniale løsning på et vanskeligt problem. Abstraktionsniveauet var måske for højt for de hjemlige matematikere, og desuden var afhandlingen skrevet på dansk, som var uforståeligt ude i Europa. I en oversigt fra 1843 over artiklerne i Videnskabernes Selskabs Skrifter kan man om de matematiske afhandlinger - heriblandt Caspar Wessels - læse, at

...de ere Monographier, hvis videnskabelige Betydning ikke er stor... de ere for specielle til videre at omtales.

Mere tydeligt kan man vist ikke udtrykke manglende forståelse, og Caspar Wessels arbejde har da heller ikke haft nogen betydning for den videnskabelige udvikling. Først omkring 100 år efter udgivelsen, i 1895, blev Caspar Wessels afhandling genopdaget, men da havde franskmanden Argand og tyskeren Gauss allerede fået æren for en logisk korrekt fremstilling af de komplekse tal. Hverken Argands eller Gauss's videnskabelige arbejder var dog så fuldkomne som Caspar Wessels. Man skulle helt frem til midten af 1800-tallet, før de komplekse tal blev almindeligt anerkendt i bredere kredse og accepteret som en gyldig del af matematikken.

IV. Caspar Wessels komplekse tal

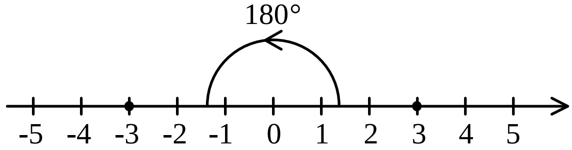
Caspar Wessel introducerede de komplekse tal ved at give en *geometrisk* definition af tallene og deres regneoperatorer. Fordelen ved en geometrisk definition er, at den er konkret og let forståelig. Dens bestanddele er rette liniestykker, længder og vinkler. Ulempen er imidlertid, at man kun vanskeligt kan lade de nye tal indgå i matematiske udtryk og ligninger, så længe de er repræsenteret af geometriske objekter.

Derfor oversatte Caspar Wessel sine geometriske definitioner til *algebraiske* formler. Den algebraiske beskrivelse frigør i en vis forstand de nye tal fra deres geometriske herkomst og giver dem deres eget selvstændige liv. Overgangen fra en konkret repræsentation til en abstrakt algebraisk har vi mødt før. Vi har vænnet os til at tænke på begrebet 3 uden nødvendigvis at skulle tænke på tre ting: tre blomster, tre får eller tre liniestykker. Det abstrakte regnestykke $3+5=8$ er meget mere anvendeligt end det konkrete "tre får og fem får er otte får". Ved at abstrahere fra det konkrete undgår man at skulle udvikle én regnekunst for blomster, én for får og én for liniestykker. I den algebraiske beskrivelse optræder tallene som abstrakte størrelser. Man kan give dem navne, og man kan lave formler, som entydigt beskriver nogle generelle sammenhænge, for eksempel $(z \cdot w)^2 = z^2 \cdot w^2$.

Resten af dette kapitel følger i store træk Caspar Wessels egen fremstilling med hyppige citater fra hans afhandling, hvoraf de første 10 paragraffer findes gengivet i appendiks side 42.

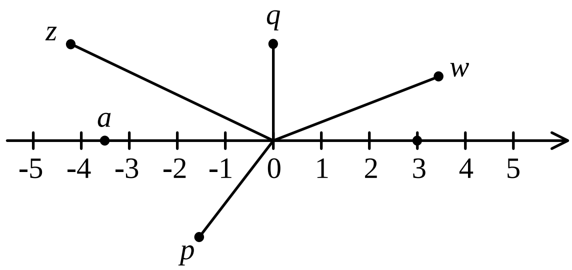
Geometrisk definition af komplekse tal

Rette liniestykker kan have alle mulige længder og retninger, hvorimod de reelle tal kun kan antage to forskellige retninger, nemlig fremadrettet og bagudrettet. Retningen af et tal er fastlagt af tallets fortegn. Tallene +3 og –3 har begge længden 3, men det første er fremadrettet (positivt), og det andet er bagudrettet (negativt). Hvis retningerne angives som vinkler, kan man sige, at +3 har retningen $0°$, og –3 har retningen $180°$:



Caspar Wessels idé - *at tage Operationerne i en vidtløftigere Mening* - gik ud på at ophæve forskellen mellem tal og rette liniestykker og at udstrække regneoperationerne til at omfatte tal med alle mulige retninger i en to-dimensional plan - ikke kun de fremadrettede (positive) og de bagudrettede (negative). Disse nye tal udgør de komplekse tal. *Et komplekst tal er altså et liniestykke med en vis længde og en vis retning*.

De komplekse tal omfatter også de reelle. Et reelt tal er jo blot et liniestykke med retningen $0°$ eller $180°$. Når man skal tegne et komplekst tal, parallelforskyder man som regel det tilsvarende liniestykke, således at dets begyndelsespunkt falder sammen med 0 på den reelle talakse. Ved en parallelforskydning ændres hverken længden eller retningen, og dermed heller ikke det komplekse tal. Nedenstående figur viser placeringen af nogle komplekse tal i den komplekse talplan:



3-tallet på den reelle talakse markerer endepunktet af det liniestykke (det komplekse tal), som begynder ved 0, og som har længden 3 og retningen $0°$. På samme måde ses, at *w* er et komplekst tal med en længde på omkring 3,7 og en retning på ca. 24°.

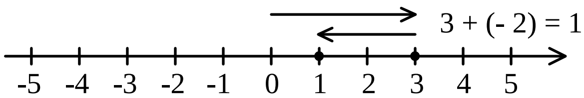
Geometrisk definition af kompleks addition

Efter definitionen af de komplekse tal bliver den næste opgave at definere en fornuftig addition af disse nye tal. Caspar Wessels definition lyder således:

> *To rette Linier adderes, naar man først føier dem sammen, saaledes at den ene begynder, hvor den anden slipper, derefter drager fra de sammenføiedes første til sidste Punct en ret Linie, og antager saa denne for de sammenføiedes Sum.*

Til forklaring gav han først et simpelt eksempel med reelle tal:

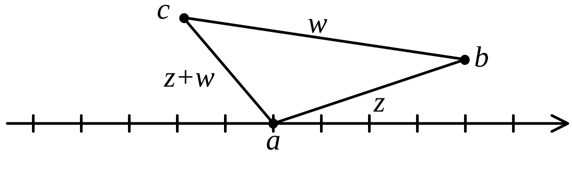
> *Gaaer f. Ex. et Punct 3 Fod frem, og derefter 2 Fod tilbage, saa er disse to Veies Sum ikke de første 3 og sidste 2 Fod sammenføiede; men een Fod frem er Summen, for saavidt denne Vei, af samme Punct beskreven, har samme Virkning, som begge de to andre Veie.*



- og dernæst et mere generelt eksempel:

> *Ligeledes naar en Triangels ene Side strækker sig fra a til b, og den anden fra b til c, maa den tredie fra a til c kaldes Summen, og maa betegnes ved $ab+bc$, saa at ac og $ab+bc$ have samme Betydning, eller $ac = ab+bc = -ba+bc$, dersom ba er det modsatte af ab.*

På figuren nedenfor er *z* og *w* to komplekse tal, og $z+w$ er deres sum. Det komplekse tal *z* er liniestykket fra punkt *a* til punkt *b*, og det komplekse tal *w* er liniestykket fra punkt *b* til punkt *c*. Summen af *z* og *w* da det komplekse tal, der begynder i punkt *a* og slutter i punkt *c*.

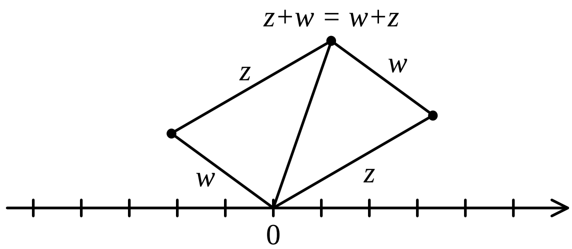


Caspar Wessel forklarede derefter, at den komplekse addition er en *generalisering* af den reelle addition. Det vil sige, at hvis vi bruger den nye definition til at addere to reelle tal, får vi samme resultat, som hvis vi havde brugt den gamle reelle addition. Ved beregning af $3+(-2)$, som i Caspar Wessels eksempel ovenfor, skal man ifølge den nye definitionen begynde med et fremadrettet liniestykke af længde 3 og i dette liniestykkes endepunkt anbringe et bagudrettet liniestykke af længde 2. Summen er da det liniestykke, der begynder i det første liniestykkes første punkt og slutter i det sidste liniestykkes sidste punkt, det vil sige et fremadrettet liniestykke af længde 1. Det betyder, at $(+3)+(-2)=+1$, hvilket stemmer med den reelle addition.

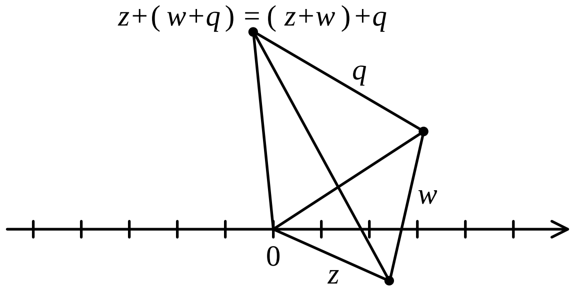
Hvis z betegner et vilkårligt komplekst tal, så er $z + 0$ det samme liniestykke som z, thi når et liniestykke af længde 0 lægges i forlængelse af liniestykket z, så er slutpunktet uforandret. Det betyder, at 0 er *neutral* over for addition.

Hvis vi sammenføjer et vilkårligt komplekst tal z med det komplekse tal w, som har samme længde som z men med modsat retning, så vil liniestykket, som går fra z's første punkt til w's sidste punkt, have længden 0. Det vil sige $z + w = 0$, hvoraf ses at w er et *modsat* element til z.

Ved betragtning af parallelogrammet på nedenstående figur ses, at den komplekse addition er *kommutativ*:



Den komplekse addition er også *associativ*, hvilket illustreres af nedenstående figur, hvori de to diagonaler repræsenterer delsummerne $z + w$ og $w + q$:



Caspar Wessel argumenterede for den kommutative og den associative lov for addition ved i stedet at argumentere for, at man kan danne summen af mange led uden at bekymre sig om addendernes rækkefølge og uden at angive leddenes grupperinger, det vil sige uden at sætte parenteser:

> *Naar flere end to rette Linier skal adderes, følges samme Regel; de forenes nemlig, saa at førstes sidste Punct sammenføies med det første af den anden, dennes sidste med tredies første o. s. v., derefter drages fra det Punct, hvor første begynder, til det, hvor sidste slipper, en ret Linie, og denne kaldes Summen af dem alle.*
>
> *Hvad for en Linie, der skal tages for den første, og hvilken for den anden, tredie o. s. v., er ligegyldigt; ... følgelig bidrager een af flere adderte Linier til Positionens Bestemmelse af Summens sidste Punct ligesaa meget, naar den er den første, som naar den er den sidste, eller hvad anden Orden den har til de andre adderte; følgelig er Ordenen i rette Liniers Addition ligegyldig, og Summen bliver alletider den samme, fordi dens første Punct antages given, og det sidste faaer alletider samme Position.*
>
> *Derfor kan ogsaa i dette tilfælde Summen betegnes ved de adderte Linier forbundne med hinanden ved Tegnet +. Naar i en Fiirkant f. Ex. den første Side er dragen fra a til b, den anden fra b til c, den tredie fra c til d, men den fierde fra a til d: saa kan sættes* $ad = ab + bc + cd$.

Det bemærkes, at Caspar Wessel ikke brugte betegnelserne »den kommutative lov« og »den associative lov«. Disse navne blev først gængse med fremkomsten af den moderne algebra. Deri skal man dog ikke lægge, at Caspar Wessel var i tvivl om hvilke regler, en anvendelig talstruktur skal opfylde. Men manglen på navne sammenholdt med de prosa-agtigt formulerede definitioner giver en anden struktur i udredelsen af tallenes egenskaber end den, moderne matematikere er vant til. Caspar Wessels redegørelse for gyldigheden af den kommutative og den associative lov fremtræder således som én stor argumentation, hvoraf det kan være vanskeligt at udkrystallisere de enkelte regler.

Geometrisk definition af kompleks multiplikation

Det hører til en af Caspar Wessels største fortjenester, at det lykkedes ham at udvide multiplikation af reelle tal til at omfatte alle retningsbestemte liniestykker. I den græske oldtid sagde man, at produktet af to naturlige tal fremkommer af den ene faktor, på samme måde som den anden faktor fremkommer af enheden. I produktet $5 \cdot 3$ fremkommer 3-tallet af enheden ved at lægge denne sammen med sig selv tre gange. Produktet fremkommer derfor af 5-tallet ved at lægge dette sammen med sig selv tre gange. Det giver som bekendt 15. Caspar Wessels definition af kompleks multiplikation ligner den oldgræske så meget, at man må formode, han har ladet sig inspirere af denne. Hans definition lyder:

> *Productet af to rette Linier maa i alle Maader kunne formeres af den ene Factor, som den anden er formeret af den positive eller absolute Linie, der sættes = 1, det er:*
>
> *Først maa Factorerne være af den Direction, at de begge kan optages i samme Plan som den positive Unitet.*
>
> *Dernæst maa i Hensigt til Længden Productet forholde sig til den ene Factor, som den anden til Uniteten; og*
>
> *Endelig, dersom man giver den positive Unitet, Factorerne og Productet et fælles første Punct, skal Productet i Hensigt til dets Retning ligge i omtalte Unitets og Factorers Plan, og afvige fra den ene Factor ligesaa mange Grader, og til samme Side, som den anden Factor afviger fra Uniteten, saa at Productets Directionsvinkel, eller Afvigning fra den positive Unitet, bliver saa stor som Summen af Factorernes Directionsvinkler.*

Man forstår bedre, hvad dette betyder, når man oversætter definitionen til moderne matematisk sprogbrug. Lad derfor z og w være to komplekse tal, lad $|z|$ og $|w|$ betegne deres længder, og lad $\angle z$ og $\angle w$ være deres retningsvinkler (Directionsvinkler). For at definere produktet $z \cdot w$, er det tilstrækkeligt at fastlægge produktets længde $|z \cdot w|$ og retning $\angle(z \cdot w)$. Med disse betegnelser lyder definitionen:

> *Produktet af z og w dannes ud fra z, på samme måde som w dannes ud fra* 1 *(den positive Unitet); det vil sige:*
>
> *Først må z og w have sådanne retninger (Directioner), at de kan anbringes i samme plan som* 1.
>
> *Dernæst, hvad angår længderne, skal $z \cdot w$ forholde sig til z, som w forholder sig til* 1*:*
>
> $$\frac{|z \cdot w|}{|z|} = \frac{|w|}{|1|}.$$
>
> *Endelig, hvad angår retningerne, skal $z \cdot w$ afvige lige så meget fra z, som w afviger fra* 1*:*
>
> $$\angle(z \cdot w) - \angle z = \angle w - \angle 1.$$

Definitionen bliver endnu mere forståelig ved hjælp af en lille omskrivning. Da $|1| = 1$ og $\angle 1 = 0°$, kan de to ligninger i definitionen skrives:

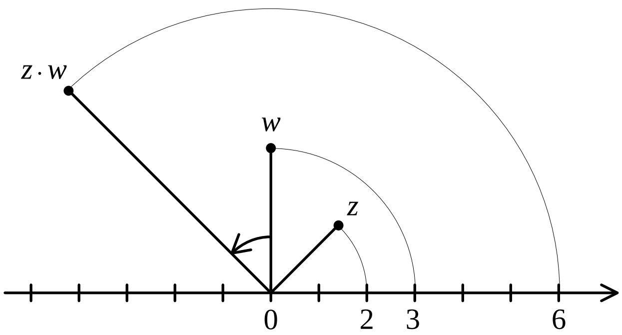
$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$$
$$\angle(z\cdot w) = \angle z + \angle w$$

eller med andre ord:

To komplekse tal multipliceres ved at multiplicere deres længder og addere deres retninger.

Ovenstående definition er en *generalisering* af den reelle multiplikation. Lad os som eksempel beregne $(+3)\cdot(-5)$ ved anvendelse af den nye definition. Længdernes produkt er $3\cdot 5 = 15$, og retningernes sum er $0°+180° = 180°$ (d.v.s. bagudrettet). Altså er $(+3)\cdot(-5) = -15$. For regnestykket $(-3)\cdot(-5)$ finder man tilsvarende, at længdernes produkt er $3\cdot 5 = 15$, og retningernes sum er $180°+180° = 360°$ (d.v.s. fremadrettet). Derfor er $(-3)\cdot(-5) = +15$, hvilket stemmer med den reelle multiplikation.

Hvis *z* er et komplekst tal med længde 2 og retning $45°$, og *w* er et komplekst tal med længde 3 og retning $90°$, så er $z\cdot w$ ifølge definitionen et komplekst tal med længde $2\cdot 3 = 6$ og retning $45°+90° = 135°$. På en figur ser det således ud:



Bemærk, at liniestykket *w* bliver drejet $45°$, når det bliver multipliceret med *z*. Dette havde ikke kunnet lade sig gøre, hvis *z* havde været et reelt tal. Den komplekse multiplikation gør det altså muligt at forandre et liniestykkes retning på mange flere måder end tilfældet er med reel multiplikation. Caspar Wessel har dermed nået et af de mål, han satte sig i indledningen til sin afhandling:

... man vil ogsaa let tilstaae, at det paa den Maade maa være mueligt at frembringe uendelig mange Forandringer i Liniernes Retning.

Det har ingen virkning at multiplicere et komplekst tal med 1, thi ifølge definitionen skal man multiplicere tallets længde med 1 og addere $0°$ til tallets retning. Det vil sige, at 1 er *neutral* over for multiplikation.

Lad nu *z* være et vilkårligt komplekst tal med længde *r* og retning *v*. Hvis *z* ikke er 0, har det mening at tale om det komplekse tal *w*, som har længde 1/*r* og retning $-v$. Produktet af *z* og *w* har ifølge definitionen af multiplikation længde $r\cdot 1/r = 1$ og retning $v+(-v) = 0°$. Det vil sige $z\cdot w = 1$, hvoraf følger, at *w* er et *reciprokt* element til *z*.

Caspar Wessel gjorde ikke noget ud af at bevise, at den komplekse multiplikation er kommutativ og associativ. Der er sådan set heller ikke nødvendigt, thi den komplekse multiplikation er jo defineret ved hjælp af reel længde-multiplikation og reel vinkel-addition. Og da de reelle regneoperatorer vides at være både kommutative og associative, må dette også gælde den komplekse multiplikation. Hverken længdernes produkt eller retningernes sum ændres ved forandring af rækkefølgen eller parentesernes placering.

Et mere formelt bevis for den *kommutative* lov for multiplikation kunne se således ud: Lad *z* og *w* være to komplekse tal. Af definitionen af kompleks multiplikation og af de kommutative love for reel multiplikation og addition følger da:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = |w| \cdot |z| = |w \cdot z|$$
$$\angle(z \cdot w) = \angle z + \angle w = \angle w + \angle z = \angle(w \cdot z)$$

Heraf ses, at $z \cdot w$ og $w \cdot z$ har samme længde og samme retning. Altså er de to produkter ens, og altså gælder den kommutative lov for kompleks multiplikation.

På samme måde kan man bevise den *associative* lov for kompleks multiplikation: Lad z, w og q være tre komplekse tal. Af definitionen af kompleks multiplikation og af de associative love for reel multiplikation og addition følger da:

$$|z \cdot (w \cdot q)| = |z| \cdot |w \cdot q| = |z| \cdot (|w| \cdot |q|)$$
$$= (|z| \cdot |w|) \cdot |q| = |z \cdot w| \cdot |q| = |(z \cdot w) \cdot q|$$

og

$$\angle(z \cdot (w \cdot q)) = \angle z + \angle(w \cdot q) = \angle z + (\angle w + \angle q)$$
$$= (\angle z + \angle w) + \angle q = \angle(z \cdot w) + \angle q = \angle((z \cdot w) \cdot q)$$

Heraf ses, at $z \cdot (w \cdot q)$ og $(z \cdot w) \cdot q$ har samme længde og samme retning. Altså er de to udtryk ens, og altså gælder den associative lov for kompleks multiplikation.

Algebraisk beskrivelse af komplekse tal

Hvis man kunne oversætte de geometriske definitioner til et algebraisk sprog, ville man kunne regne med liniestykker, som om det var almindelig talregning, og man ville ikke være så afhængig af geometriske prøvefigurer, som jo altid kun vil vise et eller andet specialtilfælde og derfor aldrig være generelle nok. Om de muligheder, der åbner sig ved en algebraisering af definitionerne, skrev Caspar Wessel:

> *Men just derved opnaaes (som siden skal bevises) ei alene, at alle umuelige Operationer kan undflyes, og den paradoxe Sætning, at det Muelige maa undertiden søges ved umuelige Midler, kan oplyses, men ogsaa at Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler. Og da det synes upaatvivleligt, at geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes, og underkastes de algebraiske Operationsregler, end naar den ved Figurer, og kun i enkelte Tilfælde, skal forestilles: saa synes det ogsaa ei alene tilladeligt, men endog gavnligt, at betiene sig af Operationer, der udstrækkes til flere Linier, end de ligestilte (de af samme Retning) og de modsatte.*

Caspar Wessels næste opgave var altså at give en algebraisk beskrivelse af de komplekse tal og deres regningsarter. Vi begynder med at finde et algebraisk udtryk for et vilkårligt komplekst tal. Dette forgår hos Caspar Wessel i tre tempi: først indføres en ny enhed, dernæst udledes et udtryk for et komplekst tal af længde 1 og til slut et udtryk for et komplekst tal af vilkårlig længde.

Enheden for de reelle tal er tallet 1. Enhedens længde er per definition 1, og dens retning er $0°$. Et vilkårligt reelt tal kan opfattes som et multiplum af denne enhed. For at beskrive et vilkårligt komplekst tal i den to-dimensionale talplan er det imidlertid nødvendigt at arbejde med to enheder. Som den nye enhed valgte Caspar Wessel det komplekse tal, som har længden 1 og retningen $90°$. Denne enhed, som han kaldte ε, introducerede han således:

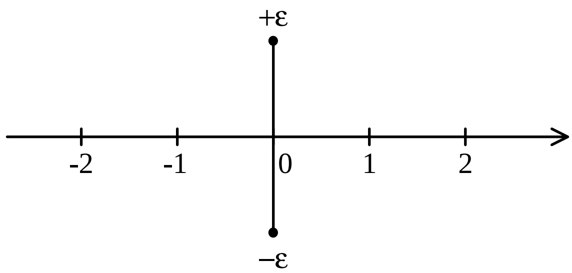
> *Lad* $+1$ *betegne den positive retlinede Unitet, og* $+\varepsilon$ *en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af* $+1 = 0$, *af* $-1 = 180°$, *af* $+\varepsilon = 90°$, *af* $-\varepsilon = -90°$ *eller* $270°$*; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes,*

bliver $(+1)\cdot(+1)=+1$, $(+1)\cdot(-1)=-1$, $(-1)\cdot(-1)=+1$, $(+1)\cdot(+\varepsilon)=+\varepsilon$, $(+1)\cdot(-\varepsilon)=-\varepsilon$, $(-1)\cdot(+\varepsilon)=-\varepsilon$, $(-1)\cdot(-\varepsilon)=+\varepsilon$, $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)=-1$, $(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=+1$, $(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=-1$.

Hvoraf sees at ε *bliver* $=\sqrt{-1}$, *og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei een eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.*

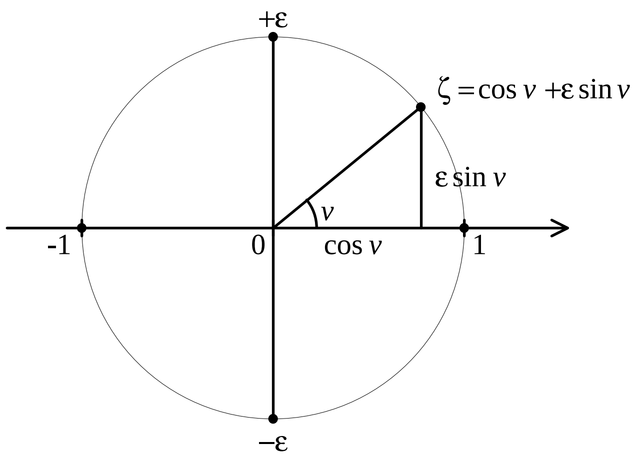
Læg specielt mærke til $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)$. Længdernes produkt er $1\cdot 1=1$, og retningernes sum er $90°+90°=180°$. Altså er $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)=-1$, således at $+\varepsilon$ er en løsning til ligningen $x^2+1=0$. På samme måde ses, at også $-\varepsilon$ er en løsning til denne ligning. Caspar Wessel har altså uddraget kvadratroden af -1 og fundet *to* tal: $+\varepsilon$ og $-\varepsilon$. At $\sqrt{-1}$ ikke repræsenterer ét tal, men to, forklarer iøvrigt det regnemæssige paradoks, som er nævnt på side 7.

Inden for de reelle tal defineres kvadratroden af et tal som det *positive* tal, der multipliceret med sig selv giver tallet under rodtegnet. Komplekse tal er imidlertid hverken positive eller negative. Det har ingen mening at tale om på hvilken side af nul, et komplekst tal befinder sig, thi det kan jo have alle mulige retninger i forhold til nul. Derfor må man inden for de komplekse tal definere kvadratroden af et tal som *de* tal, der multipliceret med sig selv giver tallet under rodtegnet. Beliggenheden af de to værdier af $\sqrt{-1}$ ses på figuren:



Vi har nu to komplekse og indbyrdes ortogonale enheder, $+1$ og $+\varepsilon$. De hedder henholdsvis den *reelle enhed* og den *imaginære enhed*. Betegnelsen imaginær (indbildt) stammer fra tiden før, man fik en geometrisk forståelse af de kompleks tal. Da opfattede man $\sqrt{-1}$ som et uforklarligt fantasi-tal, som af og til kunne optræde i mellemregninger, og som nogle gange kunne føre til fornuftige slutresultater.

Lad nu ζ være et vilkårligt komplekst tal med længde 1 og retning *v*. Så er ζ det liniestykke, som begynder i enhedscirklens centrum og slutter på cirkelperiferien, og som er drejet vinklen *v* i forhold til den reelle enhed. Liniestykket ζ er derfor summen af liniestykket $\cos v$, som er parallelt med den reelle talakse, og liniestykket $\varepsilon \sin v$, som er ortogonalt på talaksen:



Et vilkårligt komplekst tal med længde 1 og retning *v* kan altså skrives på formen $\cos v + \varepsilon \sin v$, eller med Caspar Wessels ord:

> *I Overensstemmelse med §. 1 og 6 er den Radius, som begynder fra Centrum, og afviger fra den absolute eller positive Unitet Vinkelen v, saa stor som* $\cos. v + \varepsilon \sin. v$.

Lad nu *z* være et vilkårligt komplekst tal, og lad *r* og *v* være henholdsvis længden og retningen af *z*. Hvis kateterne i den retvinklede trekant i ovenstående figur gøres *r* gange større, bliver de henholdsvis $r \cdot \cos v$ og $r \cdot \varepsilon \sin v$. Derved bliver også hypotenusen *r* gange større og får følgelig værdien $r \cdot (\cos v + \varepsilon \sin v)$. Men ifølge definitionen af addition er denne hypotenuse lig med summen af trekantens to kateter. Altså må der gælde $r \cdot (\cos v + \varepsilon \sin v) = r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \sin v$. Da *r* har længden *r* og retningen $0°$, og da $\cos v + \varepsilon \sin v$ har længden 1 og retningen *v*, følger det af definitionen af multiplikation, at det komplekse tal $r \cdot (\cos v + \varepsilon \sin v)$ har længden $r \cdot 1 = r$ og retningen $0° + v = v$. Tallet har altså samme længde og samme retning som *z* og må derfor være lig med *z*, det vil sige

$$z = r \cdot (\cos v + \varepsilon \sin v) = r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \sin v.$$

Denne udledning af det generelle algebraiske udtryk for et vilkårligt komplekst tal ligner til forveksling Caspar Wessels egen:

> Cos.*v*+εsin.*v* *er i Følge §. 7 en Cirkels Radius, hvis Længde er* =1, *og Afvigning fra* $\cos. 0°$ *er Vinkelen v; Deraf følger at* $r.\cos. v + r.\sin. v$ *betegner en ret Linie, hvis Længde er r, og hvis Directionsvinkel er = v; thi naar en retvinklet Triangels Catheter bliver r gange større, saa bliver ogsaa Hypothenusen r gange større, og Vinklerne uforandrede; men Catheternes Sum er i Følge §. 1 saa stor som Hypothenusen, altsaa er* $r \cdot \cos. v + r \cdot \varepsilon \sin. v = r(\cos. v + \varepsilon \sin. v)$. *Dette er altsaa et almindeligt Udtryk for enhver ret Linie, der ligger med Linierne* $\cos. 0°$ *og* $\varepsilon \sin. 90°$ *i samme Plan, afviger fra* $\cos. 0°$ *Graderne v, og har Længden r.*

Det kan måske undre, at Caspar Wessel inddrog ensvinklede trekanter i sin argumentation i stedet for blot at gange *r* ind i parentesen $(\cos v + \varepsilon \sin v)$. Forklaringen er naturligvis, at Caspar Wessel endnu ikke havde undersøgt gyldigheden af den distributive lov for regning med komplekse tal.

Vi har hermed bevist, at et vilkårligt komplekst tal *z* kan skrives på den algebraiske form $z = r \cos v + r\varepsilon \sin v$, hvor *r* og *v* er henholdsvis længden og retningen af *z*.

Hvis *a* og *b* betegner de reelle tal $r \cos v$ og $r \sin v$, får *z* den mere kompakte form $z = a + \varepsilon b$. Tallene *a* og *b* kaldes henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* af *z*.

Algebraisk beskrivelse af kompleks addition

Den komplekse addition er både kommutativ og associativ (se side 21). Derfor er det ikke vanskeligt at finde en algebraisk formel for kompleks addition til afløsning af den sprogligt formulerede geometriske definition på side 20.

Lad $a + \varepsilon b$ og $c + \varepsilon d$ være to vilkårlige komplekse tal, hvor *a*, *b*, *c* og *d* er reelle. Så er deres sum lig med $(a + c) + \varepsilon(b + d)$, thi af den kommutative og den associative lov for addition følger:

$$(a+\varepsilon b)+(c+\varepsilon d)$$
$$=((a+\varepsilon b)+c)+\varepsilon d \quad \text{(den associative lov)}$$
$$=(a+(\varepsilon b+c))+\varepsilon d \quad \text{(den associative lov)}$$
$$=(a+(c+\varepsilon b))+\varepsilon d \quad \text{(den kommutative lov)}$$
$$=((a+c)+\varepsilon b)+\varepsilon d \quad \text{(den associative lov)}$$
$$=(a+c)+(\varepsilon b+\varepsilon d) \quad \text{(den associative lov)}$$
$$=(a+c)+\varepsilon(b+d) \quad \text{(se nedenfor)}$$

Sidste skridt i udledningen følger af, at liniestykkerne $\varepsilon b+\varepsilon d$ og $\varepsilon(b+d)$ begge bidrager med stykket $b+d$ i ε's retning. Hermed er det bevist, at man adderer to komplekse tal ved at addere deres realdele og imaginærdele hver for sig. Den algebraiske formel for kompleks addition involverer hverken punkter, længder eller vinkler:

$$(a+\varepsilon b)+(c+\varepsilon d)=(a+c)+\varepsilon(b+d).$$

Caspar Wessels gjorde ikke noget særligt ud af denne formel men fulgte blot en generel regel om regning i flere dimensioner, som han sandsynligvis har kendt fra sit arbejde som landmåler:

> *Er summen af flere Længder, Breder og Høider = 0, saa er Summen af Længderne, den af Brederne, og den af Høiderne, hver især = 0.*

Dette betyder - i to dimensioner - at hvis flere liniestykker danner en lukket kreds og dermed har summen 0, så må summen af deres realdele og deres imaginærdele hver for sig være nul. Da liniestykkerne $a+\varepsilon b$ og $c+\varepsilon d$ sammen med det liniestykke $-x-\varepsilon y$, som er det modsatte af deres sum, danner en lukket kreds, følger af ovenstående princip, at $a+c-x=0$ og $b+d-y=0$, eller med andre ord $x=a+c$ og $y=b+d$.

Algebraisk beskrivelse af kompleks multiplikation

Som forberedelse til fremstillingen af en formel for kompleks multiplikation betragtede Caspar Wessel produktet af to komplekse tal med længde 1. Sådanne tal kan ifølge det foregående skrives som $\cos v+\varepsilon\sin v$ og $\cos u+\varepsilon\sin u$, hvor v og u betegner de to tals retninger. Da begge tal har længden 1, følger af definitionen af kompleks multiplikation, at produktet har længden $1\cdot 1=1$. Og da de to tals retninger er henholdsvis v og u, er produktets retning $v+u$. Produktet er altså det komplekse tal, der har længden 1 og retningen $v+u$:

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)\cdot(\cos u+\varepsilon\sin u)=\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u).$$

Caspar Wessels egen udledning af dette resultat ser således ud:

> *Men i Følge §. 4 skal Productet af to Factorer, hvoraf den ene afviger fra Uniteten Vinkelen v, og den anden Vinkelen u, afvige fra samme Unitet Vinkelen* $v+u$. *Altsaa naar den rette Linie* $\cos.v+\varepsilon\sin.v$ *multipliceres med den rette Linie* $\cos.u+\varepsilon\sin.u$, *bliver Productet en ret Linie, hvis Directionsvinkel er* $v+u$. *Følgelig kan Productet efter §. 1 og 6 betegnes ved* $\cos.(v+u)+\varepsilon\sin.(v+u)$.

Dernæst gik Caspar Wessel i gang med at beregne det nævnte produkt på en ny måde:

> *Dette Product* $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)\cdot(\cos.u+\varepsilon\sin.u)$ *eller* $\cos.(v+u)+\varepsilon\sin.(v+u)$ *kan endnu udtrykkes paa en anden Maade, nemlig ved at addere i een Sum de partielle Producter, som udkomme, naar hver af de adderte Linier, hvis Sum udgiør den ene Factor, multipliceres med hver af dem, hvis Sum udgiør den anden. Saaledes bliver* $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)\cdot(\cos.u+\varepsilon\sin.u)=\cos.v\cdot\cos.u-\sin.v\cdot\sin.u+\varepsilon(\cos.v\cdot\sin.u+\cos.u\cdot\sin.v)$ *i Følge de to bekiendte trigonometriske formler* $\cos.(v+u)=\cos.v\cdot\cos.u-\sin.v\cdot\sin.u$, *og* $\sin.(v+u)=\cos.v\cdot\sin.u+\cos.u\cdot\sin.v$. *Disse to Formler kan med*

> *Nøiagtighed og uden stor Vidtløftighed bevises for alle Tilfælde, enten hver af Vinklerne v og u, eller een alene er positiv, negativ, større eller mindre end en ret. De Sætninger, som af samme to Formler udledes, har følgelig ogsaa deres Almindelighed.*

Det, Caspar Wessel her siger, er, at produktet af $\cos v + \varepsilon \sin v$ og $\cos u + \varepsilon \sin u$ kan udregnes ved at multiplicere hvert af leddene i det ene udtryk med hvert af leddene i det andet. Denne påstand ville være ganske triviel, hvis gyldigheden af den distributive lov allerede var bevist, - men det er den ikke! Derfor må vi finde andre udveje. Caspar Wessel klarede problemet ved at henvise til følgende to trigonometriske formler, som er velkendte - i hvert fald for en landmåler:

$$\cos(v+u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u$$

$$\sin(v+u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v$$

Ved hjælp af disse formler kan vi regne videre på produktet:

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)\cdot(\cos u + \varepsilon \sin u)$$

$$= \cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u)$$

$$= (\cos v \cos u - \sin v \sin u) + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v)$$

Resultat i sidste linie er ikke nær så pænt og kompakt som det foregående, men det var heller ikke hensigten. Formålet med omskrivning er derimod at sætte os i stand til at kontrollere, hvorvidt det er sandt, at man bare kan gange parenteserne sammen ved at multiplicere hvert af leddene i den ene parentes med hvert af leddene i den anden. Hvis vi prøver at multiplicere på denne måde får vi:

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)\cdot(\cos u + \varepsilon \sin u)$$

$$= \cos v \cos u + \varepsilon \cos v \sin u + \varepsilon \sin v \cos u + \varepsilon^2 \sin v \sin u$$

$$= \cos v \cos u + \varepsilon \cos v \sin u + \varepsilon \sin v \cos u - \sin v \sin u$$

$$= (\cos v \cos u - \sin v \sin u) + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v)$$

hvilket ses at stemme med det korrekte resultat ovenfor. Konklusionen er altså, at det er tilladt at gange de to parenteser sammen på sædvanlig måde, i hvert fald når de to faktorer har længden 1.

Caspar Wessel er nu kommet så vidt, at han kan afslutte sin søgen efter en algebraisk formel for kompleks multiplikation med følgende sætning:

> *Betegne a, b, c, d directe Linier af hvilken Længde som helst, positive eller negative, og de to indirecte $a+\varepsilon b$ og $c+\varepsilon d$ ligge i samme Plan som den absolute Unitet; saa kan deres Product findes, endogsaa naar deres Afvigning fra den absolute Unitet er ubekiendt; man behøver nemlig kun at multiplicere enhver af de adderte Linier, der udgiøre den ene Sum, med enhver af dem, som udgiøre den anden, saa vil disse Producter adderte udgiøre det søgte Product baade i Henseende til Længden og Retningen; saa at $(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad+bc)$.*

Sætningen siger dels, at produktet $(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d)$ af to vilkårlige komplekse tal kan udregnes efter formlen $ac - bd + \varepsilon(ad+bc)$ og dels, at man får det samme resultat ved at gange hvert af leddene i den ene faktor med hvert af leddene i den anden. Caspar Wessel beviste sætningen således:

> *Beviis. Lad Liniens a+εb Længde være A, og Afvigning fra den absolute Unitet v Grader; men Liniens c+εd Længde = C, og Afvigning = u: saa er, i Følge §. 9, a+ε b = A·*cos.*v+A·ε*sin.*v, og c+εd = C·*cos.*u + C·ε*sin.*u, altsaa a = A·*cos.*v, b = A·*sin.*v,*

> *$c = C \cdot \cos.u$, $d = C \cdot \sin.u$ (§. 3); men i Følge §. 4 er $(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = A\cdot C\cdot[\cos.(v+u) + \varepsilon \sin.(v+u)] = A\cdot C\cdot[\cos.v\cdot\cos.u - \sin.v\cdot\sin.u + \varepsilon(\cos.v \cdot \sin.u + \cos.u \cdot \sin.v)]$ §. 8. Følgelig, naar isteden for $A\cdot C\cdot\cos.v\cdot\cos.u$ sættes $a\cdot c$, isteden for $A\cdot C\cdot\sin.v\cdot\sin.u$ $b\cdot d$, o.s.v.: udkommer det, som skulde bevises.*

I en lidt mere moderne opsætning lyder det således: Lad $a + \varepsilon b$ være et komplekst tal med længde A og retning v, og lad $c + \varepsilon d$ være et komplekst tal med længde C og retning u. Så kan de to tal skrives på formen:

$$a + \varepsilon b = A\cos v + A\varepsilon \sin v$$

$$c + \varepsilon d = C\cos u + C\varepsilon \sin u$$

Hvis vi udskiller tallenes real- og imaginærdele fås:

$$a = A\cos v, \quad b = A\sin v, \quad c = C\cos u, \quad d = C\sin u.$$

Ifølge definitionen af multiplikation er længden og retningen af tallenes produkt henholdsvis AC og $v+u$. Derfor er produktet ifølge tidligere viste resultater samt ovenstående udtryk for a, b, c og d bestemt ved:

$$\begin{aligned}
&(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) \\
&= AC[\cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u)] \\
&= AC[(\cos v \cos u - \sin v \sin u) + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v)] \\
&= AC \cos v \sin u - AC \sin v \sin u + \varepsilon(AC \cos v \sin u + AC \cos u \sin v) \\
&= ac - bd + \varepsilon(ad + bc)
\end{aligned}$$

hvilket viser, at multiplikationsformlen er korrekt. At man kommer til samme resultat ved blot at følge de normale regneregler, indses ved prøve. Lad som før $a + \varepsilon b$ og $c + \varepsilon d$ være to komplekse tal. Når man beregner produktet på den måde, man er vant til fra de reelle tal, fås:

$$\begin{aligned}
&(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) \\
&= ac + \varepsilon ad + \varepsilon bc + \varepsilon^2 bd \\
&= ac + \varepsilon ad + \varepsilon bc - bd \\
&= ac - bd + \varepsilon(ad + bc)
\end{aligned}$$

hvilket ses at stemme med det tidligere resultat. Altså kan vi fremover multiplicere komplekse tal, som om der var tale om sædvanlige reelle tal. Vi behøver med andre ord ikke længere at referere til faktorernes længder og retninger, men kan vælge enten at bruge den algebraiske formel

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$$

eller bare regne, som om det var reelle tal, vi havde med at gøre, blot med den lille tilføjelse, at $\varepsilon^2 = -1$. Herefter er det også klart, at den *distributive* lov er gyldig for regning med komplekse tal:

> *... nemlig at naar to Summer skal multipliceres med hinanden, da maa enhver af de adderte Størrelser i den ene Sum multipliceres med enhver af de adderte i den anden.*

Sammenfatning, eksempler og øvelser

Vi har i det foregående gennemgået de væsentligste dele af §1-10 i Caspar Wessels afhandling. I de efterfølgende 6 paragraffer udledte Caspar Wessel algebraiske formler for komplekse reciprokværdier, kvotienter, potenser og rødder samt for den komplekse eksponentialfunktion.

Og i de resterende 55 paragraffer demonstrerede han anvendeligheden af den nye teori ved at udvikle avancerede metoder for beregning af sider og vinkler i plane og sfæriske polygoner.

Caspar Wessel havde ikke den moderne algebras metoder og systematik til sin rådighed. Alligevel lykkedes det ham indirekte at gøre rede for, at de komplekse tal udgør et legeme. Nogle af kravene, for eksempel kravet om at ethvert komplekst tal skal have et modsat komplekst tal, har han ikke ofret megen omtale, fordi de har været åbenlyst tilgodeset som en direkte følge af hans definitioner.

Resumé

Vores resumé kan være: De komplekse tal består af alle udtryk af formen $a+\varepsilon b$, hvor a og b er reelle tal, og hvor ε er et nyt tal, som opfylder $\varepsilon^2=-1$. De komplekse tal udgør en udvidelse af de reelle tals legeme, og man kan regne med komplekse tal efter de samme regler som dem, der gælder for de reelle tal.

Anvendelser

Caspar Wessel var - som nævnt på side 17 - klar over, at de nye tal kunne bruges generelt til alle former for praktisk og teoretisk beregning. Overalt i den moderne matematik benyttes komplekse tal og funktioner, fordi de forenkler teorien og skaber bedre overblik. De mest overbevisende eksempler på praktiske anvendelser finder man nok inden for vekselstrømsteorien, hvor komplekse tal og funktioner bruges til analyse og design af elektroniske kredsløb.

Perspektiver

De reelle tal er én-dimensionale, hvorimod de komplekse tal har to dimensioner. Det er derfor fristende at prøve at fortsætte udviklingen med tallegemer af endnu højere dimension. Men et sådant projekt er dømt til at mislykkes. De komplekse tal er absolut sidste led i den kæde af udvidelser, som begyndte med de naturlige tal. I den forstand kan man sige, at de komplekse tal er det ultimative tallegeme.

Caspar Wessel var nok klar over dette. I hvert fald konstaterede han, at det ikke er muligt at udvide multiplikationen til at omfatte tre-dimensionale tal:

> *Men vilde man multiplicere med hinanden rette Linier, som ikke begge kunde ligge i samme Plan med den absolutte Unitet: maatte omtalte Regel tilsidesættes. Dette er Aarsagen, hvorfor jeg forbigaaer saadanne Liniers Multiplication.*

Hans iagttagelse er interessant af historiske grunde. Fysikerne og matematikerne havde længe næret et velbegrundet ønske om at kunne regne med tre-dimensionale tal. I begyndelsen af 1800-tallet var man ivrigt optaget af at få løst problemet. Selve definitionen af de tre-dimensionale tal voldte ingen problemer, men den store gåde var, hvorledes man skulle definere deres regneoperatorer, således at de sædvanlige regneregler fortsat var gældende. Jagten på de tre-dimensionale tal sluttede først i 1843, da det blev almindeligt kendt, at problemet var uløseligt. På det tidspunkt, altså 47 år efter at Caspar Wessels skrev sin afhandling, indså den irske matematiker Sir William Rowan Hamilton, at det var nødvendigt at gå op i *fire* dimensioner, for at få en veldefineret multiplikation, og denne var endda ikke kommutativ. Disse fire-dimensionale tal - de såkaldte *quaternioner* - udgør derfor ikke noget legeme, men de har alligevel fundet anvendelse inden for visse grene af den teoretiske fysik.

Øvelse 5

Gør rede for, at man dividerer to komplekse tal ved at dividere deres længder og subtrahere deres retninger.

Eksempel
Når man regner med komplekse tal, kan bare regne, som man er vant til, thi de komplekse tal er et legeme. Man skal dog lige huske, at $\varepsilon^2 = -1$:

Addition: $(3+5\varepsilon)+(-2+7\varepsilon) = 3+5\varepsilon-2+7\varepsilon = 1+12\varepsilon$

Subtraktion: $(3+5\varepsilon)-(-2+7\varepsilon) = 3+5\varepsilon+2-7\varepsilon = 5-2\varepsilon$

Multiplikation: $(3+5\varepsilon)(-2+7\varepsilon) = -6+21\varepsilon-10\varepsilon-35 = -41+11\varepsilon$

Division: $\dfrac{3+5\varepsilon}{-2+7\varepsilon} = \dfrac{(3+5\varepsilon)(-2-7\varepsilon)}{(-2+7\varepsilon)(-2-7\varepsilon)} = \dfrac{-6-21\varepsilon-10\varepsilon+35}{(-2)^2-(7\varepsilon)^2}$

$= \dfrac{29-31\varepsilon}{4+49} = \dfrac{29}{53} - \dfrac{31}{53}\varepsilon$

Øvelse 6
Lav følgende regnestykker:

a) $(-1+2\varepsilon)+(14+3\varepsilon)$

b) $(4-5\varepsilon)-(2+8\varepsilon)$

c) $(3+2\varepsilon)\cdot\varepsilon$

d) $\dfrac{-6+\varepsilon}{1+\varepsilon}$

e) $(3+2\varepsilon)(3-2\varepsilon)$

f) $\dfrac{3+2\varepsilon}{3-2\varepsilon}$

g) $\dfrac{1}{-6+2\varepsilon}$

Øvelse 7
a) Beregn ε^n for $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$.

b) Beregn ε^{-n} for $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$.

c) Find de værdier af $n \in Z$, for hvilke $\varepsilon^n = 1$.

d) Bevis, at $\varepsilon^n = \varepsilon$, såfremt $n-1$ er et helt tal, som er deleligt med 4.

e) Find de værdier af $n \in Z$, for hvilke $\varepsilon^n = -1$.

Øvelse 8
a) Beregn længden og retningsvinklen for følgende fire komplekse tal: $3+4\varepsilon$, $-3+4\varepsilon$, $-3-4\varepsilon$, $3-4\varepsilon$.

b) Et komplekst tal har længden 4 og retningsvinklen $30°$. Skriv tallet på formen $a+\varepsilon b$.

Øvelse 9
I §12 i Caspar Wessels afhandling kan man blandt andet læse:

> *Ere a, b, c og d directe Linier, og de indirecte* $a+\varepsilon b$ *og* $c+\varepsilon d$ *ere i samme Plan med den absolute Unitet: da er* $\dfrac{1}{c+\varepsilon d} = \dfrac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$, *og Qvotienten*

$$\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\cdot\frac{1}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\left[ac+bd+\varepsilon(bc-ad)\right]:(c^2+d^2);$$

thi ...

a) Hvad betyder det?

b) Bevis ved anvendelse af divisionsprøve formlen for reciprokværdien af et komplekst tal:

$$\frac{1}{c+\varepsilon d}=\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$$

c) Bevis formlen for kvotienten mellem to komplekse tal:

$$\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}=\frac{ac+bd+\varepsilon(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Øvelse 10

a) Lad z være et komplekst tal med længde r og retning v. Så kan z som bekendt (se side 26) skrives på formen $z=r(\cos v+\varepsilon\sin v)$. Bevis, at for et vilkårligt $n\in N$ gælder:

$$z^n=r^n(\cos(nv)+\varepsilon\sin(nv)).$$

b) Bevis, at for alle $n\in N$ og alle $v\in R$ gælder formlen:

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)^n=\cos(nv)+\varepsilon\sin(nv).$$

c) Benyt ovenstående til at udtrykke $\cos(3v)$ og $\sin(3v)$ ved hjælp af $\cos v$ og $\sin v$.

V. Abstrakte komplekse tal

Caspar Wessel brugte betegnelsen ε for den imaginære enhed. Blandt svagstrømsingeniører er der tradition for at bruge betegnelsen *j*, mens man i den nyere matematik - og derfor også i nærværende kapitel - bruger *i* som symbol for den imaginære enhed.

Slutresultatet i dette kapitel er præcis det samme som i det foregående, nemlig:

> De komplekse tal består af alle udtryk af formen $a+ib$, hvor a og b er reelle tal, og hvor i er et nyt tal, som opfylder $i^2=-1$. De komplekse tal udgør sammen med kompleks addition og multiplikation et legeme, som er en udvidelse af de reelle tals legeme. Man kan derfor regne med komplekse tal efter præcis de samme regler som dem, der gælder for de reelle.

Men fremstillingsformen i dette kapitel er anderledes. Den bærer præg af meget større abstraktion og præcision. Ved at fjerne alle uvedkommende elementer resterer kun den matematiske struktur - et skelet - bygget op af definitioner, sætninger og ren logik. Teorien er blottet for pædagogiske forklaringer, og der appelleres ikke til vanlig intuition. Formålet med en sådan fremstilling er nemlig slet ikke at give en dybere forståelse af, hvad emnet egentlig handler om, men derimod at dokumentere resultaternes matematiske uangribelighed. Eventuelle svagheder i beviser eller forudsætninger træder meget tydeligere frem, når teorien ikke pakkes ind i bløde forklaringer.

En præsentation af denne slags kommer altid meget sent i en teoris udvikling, nemlig på et tidspunkt, hvor man har været igennem alle overvejelser, og hvor man ikke selv er ret meget i tvivl om resultaternes gyldighed. For at meddele dette til omverdenen og for at overbevise sig selv om at man ikke har begået en fatal fejl, »vender man bøtten«, filtrerer alt det overflødige fra og starter fra begyndelsen.

Det følgende er et eksempel på, hvor kompakt teorien for de komplekse tal og deres regneoperatorer fremtræder, når man udelader alt det, der ikke direkte har med det matematiske indhold at gøre. Dog vil der ind imellem definitionerne og sætningerne forekomme små bemærkninger. Den læser, der ønsker den rene vare, kan blot springe disse over.

Definition af de komplekse tal

Definition
De komplekse tal $(C,+,\cdot)$ består af mængden C samt regneoperatorerne addition og multiplikation, som er fastsat ved:

$$C=\{(a,b)\mid a\in R\wedge b\in R\}$$
$$\forall(a,b)\in C\ \forall(c,d)\in C:(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$\forall(a,b)\in C\ \forall(c,d)\in C:(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

To komplekse tal (a,b) og (c,d) er ens, netop når $a=c$ og $b=d$.

Bemærkning
Hvis man definerede et komplekst tal til at have formen $a+ib$, hvilket ville være det mest oplagte, ville man have problemer med logikken, thi udtrykket $a+ib$ inkluderer et additionstegn og et (underforstået) multiplikationstegn. Men hverken kompleks addition eller multiplikation har nogen mening på et tidspunkt, hvor de komplekse tal er ved at blive defineret. Derfor bruges den abstrakte form (a,b) som repræsentant for et komplekst tal. Senere skal vi dog se, at denne form i virkeligheden blot dækker over det sædvanlige udtryk $a+ib$ for et komplekst tal. Definitionerne af addition og multiplikation er - bortset fra skrivemåden - identiske med Caspar Wessels additions- og multiplikationsformler. Der et værd at bemærke, at det, der hos Caspar Wessel optræder som forholdsvis sene resultater, nu benyttes som de indledende definitioner. Dette er, hvad der på side 33 menes med udtrykket »at vende bøtten«.

De komplekse tal er et legeme

Sætning
$(C,+,\cdot)$ er et legeme.

Beviset føres ved hjælp af en række del-beviser.

Bevis for at *C* er stabil over for addition
For vilkårlige komplekse tal (a,b) og (c,d) gælder:

$$
\begin{array}{ll}
(a,b)\in C \wedge (c,d)\in C & \\
\Rightarrow a\in R \wedge b\in R \wedge c\in R \wedge d\in R & (\text{definitionen af } C) \\
\Rightarrow a+c\in R \wedge b+d\in R & (R \text{ er et legeme}) \\
\Rightarrow (a+c,b+d)\in C & (\text{definitionen af } C) \\
\Rightarrow (a,b)+(c,d)\in C & (\text{definitionen af addition})
\end{array}
$$

hvoraf ses, at C er stabil over for addition.

Bevis for at *C* er stabil over for multiplikation
For vilkårlige komplekse tal (a,b) og (c,d) gælder:

$$
\begin{array}{ll}
(a,b)\in C \wedge (c,d)\in C & \\
\Rightarrow a\in R \wedge b\in R \wedge c\in R \wedge d\in R & (\text{definitionen af } C) \\
\Rightarrow ac-bd\in R \wedge ad+bc\in R & (R \text{ er et legeme}) \\
\Rightarrow (ac-bd,ad+bc)\in C & (\text{definitionen af } C) \\
\Rightarrow (a,b)\cdot(c,d)\in C & (\text{definitionen af multiplikation})
\end{array}
$$

hvoraf ses, at C er stabil over for multiplikation.

Bevis for at addition er kommutativ
For vilkårlige komplekse tal (a,b) og (c,d) gælder:

$$
\begin{array}{ll}
(a,b)+(c,d) & \\
=(a+c,b+d) & (\text{definitionen af addition})
\end{array}
$$

og

$$(c,d)+(a,b)$$
$$=(c+a,d+b) \quad \text{(definitionen af addition)}$$
$$=(a+c,b+d) \quad (R \text{ er et legeme})$$

Ved sammenligning af de to resultater ses, at addition er kommutativ.

Bevis for at multiplikation er kommutativ
For vilkårlige komplekse tal (a,b) og (c,d) gælder:

$$(a,b)\cdot(c,d)$$
$$=(ac-bd,ad+bc) \quad \text{(definitionen af multiplikation)}$$

og

$$(c,d)\cdot(a,b)$$
$$=(ca-db,cb+da) \quad \text{(definitionen af multiplikation)}$$
$$=(ac-bd,ad+bc) \quad (R \text{ er et legeme})$$

Ved sammenligning af de to resultater ses, at multiplikation er kommutativ.

Bevis for at addition er associativ
For vilkårlige komplekse tal (a,b), (c,d) og (e,f) gælder:

$$(a,b)+((c,d)+(e,f))$$
$$=(a,b)+(c+e,d+f) \quad \text{(definitionen af addition)}$$
$$=(a+(c+e),b+(d+f)) \quad \text{(definitionen af addition)}$$

og

$$((a,b)+(c,d))+(e,f)$$
$$=(a+c,b+d)+(e,f) \quad \text{(definitionen af addition)}$$
$$=((a+c)+e,(b+d)+f) \quad \text{(definitionen af addition)}$$
$$=(a+(c+e),b+(d+f)) \quad (R \text{ er et legeme})$$

Ved sammenligning af de to resultater ses, at addition er associativ.

Bevis for at multiplikation er associativ
For vilkårlige komplekse tal (a,b), (c,d) og (e,f) gælder:

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$
$$=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de) \quad (*)$$
$$=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df)) \quad (*)$$
$$=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf) \quad (**)$$

og

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)$$
$$=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f) \quad (*)$$
$$=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e) \quad (*)$$
$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce) \quad (**)$$
$$=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf) \quad (**)$$

hvor (*) følger af definitionen af multiplikation, og (**) skyldes, at *R* er et legeme. Ved sammenligning af de to resultater ses, at multiplikation er associativ.

Bevis for at multiplikation er distributiv med hensyn til addition
For vilkårlige komplekse tal (a,b), (c,d) og (e,f) gælder:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) \\
&=(a,b)\cdot(c+e,d+f) && (*) \\
&=(a(c+e)-b(d+f),a(d+f)+b(c+e)) && (**) \\
&=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be) && (***)
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
&((a,b)\cdot(c,d))+((a,b)\cdot(e,f)) \\
&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be) && (**) \\
&=((ac-bd)+(ae-bf),(ad+bc)+(af+be)) && (*) \\
&=(ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be) && (***) \\
&=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be) && (***)
\end{aligned}
$$

hvor (*) følger af definitionen af addition, (**) følger af definitionen af multiplikation, og (***) følger af, at *R* er et legeme. Ved sammenligning af de to resultater ses, at multiplikation er distributiv med hensyn til addition.

Bevis for eksistens af et nulelement og et ételement, som er forskellige
Da *R* er et legeme, er $0 \in R$, $1 \in R$ og $0 \neq 1$. Dette, samt definitionen af de komplekse tal, giver $(0,0) \in C$, $(1,0) \in C$ og $(0,0) \neq (1,0)$. Vi beviser nu, at $(0,0)$ og $(1,0)$ er henholdsvis et nulelement og et ételement i *C*. Lad derfor (a,b) være et vilkårligt komplekst tal. Så gælder:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)+(0,0) \\
&=(a+0,b+0) && (\text{defitinionen af addition}) \\
&=(a,b) && (R \text{ er et legeme})
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\cdot(1,0) \\
&=(a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1) && (\text{definitionen af multiplikation}) \\
&=(a,b) && (R \text{ er et legeme})
\end{aligned}
$$

hvoraf ses, at $(0,0)$ og $(1,0)$ er henholdsvis et nulelement og et ételement i *C*. Da disse endvidere er forskellige, er det ønskede bevist.

Bevis for eksistens af modsatte elementer
Det skal vises, at ethvert element i *C* har et modsat element i *C*. Lad derfor (a,b) være et vilkårligt element i *C*. Så gælder:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\in C \\
&\Rightarrow a\in R \wedge b \in R && (\text{definitinen af } C) \\
&\Rightarrow -a\in R \wedge -b \in R && (R \text{ er et legeme}) \\
&\Rightarrow (-a,-b)\in C && (\text{definitionen af } C)
\end{aligned}
$$

Altså er $(-a,-b)$ et komplekst tal. Der gælder endvidere:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)+(-a,-b) \\
&=(a+(-a),b+(-b)) \quad (\text{definitionen af addition}) \\
&=(0,0) \quad (R \text{ er et legeme})
\end{aligned}
$$

hvoraf ses, at $(-a,-b)$ et modsat element til (a,b).

Bevis for eksistens af reciprokke elementer
Det skal vises, at ethvert element i $C \setminus \{(0,0)\}$ har et reciprokt element i C. Lad derfor (a,b) være et vilkårligt element i $C \setminus \{(0,0)\}$. Så er a^2+b^2 et positivt reelt tal, thi:

$$
\begin{aligned}
&(a,b) \in C \setminus \{(0,0)\} \\
&\Rightarrow a \in R \wedge b \in R \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0) \quad (\text{definitionen af } C) \\
&\Rightarrow a^2+b^2 \in R \wedge a^2+b^2 > 0 \quad (R \text{ er et ordnet legeme } (*))
\end{aligned}
$$

Ved (*) er benyttet en egenskab ved de reelle tal, som ikke gælder generelt for et legeme, nemlig at de reelle tal er et ordnet legeme. Se i øvrigt bemærkningerne på side 14. Da det nu er vist, at a^2+b^2 er et positivt reelt tal, ved vi, at a^2+b^2 ikke er nul. Derfor gælder:

$$
\begin{aligned}
&a \in R \wedge b \in R \wedge a^2+b^2 \neq 0 \\
&\Rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} \in R \wedge \frac{-b}{a^2+b^2} \in R \quad (R \text{ er et legeme}) \\
&\Rightarrow \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in C \quad (\text{definitionen af } C)
\end{aligned}
$$

Endvidere gælder:

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \\
&=\left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}\right) \quad (*) \\
&=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) \quad (**) \\
&=(1,0) \quad (**)
\end{aligned}
$$

hvor (*) følger af definitionen af multiplikation, og (**) følger af, at R er et legeme. Heraf ses, at elementet

$$
\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)
$$

er et reciprokt element til (a,b). Dette afslutter beviset for, at $(C,+,\cdot)$ er et legeme.

Simple egenskaber ved komplekse tal

Definition
Et element i C, som har formen $(a,0)$, identificeres med det reelle tal a. Elementet $(0,1)$ i C betegnes med i.

Bemærkning
At $(a,0)$ identificeres med *a* betyder blot, at vi opfatter $(a,0)$ som en anden skrivemåde for det reelle tal *a*. Det vil sige $a=(a,0)$. I et to-dimensionalt koordinatsystem, svarer det til at identificere tallet *a* på førsteaksen med punktet $(a,0)$, som jo ligger samme sted.

Sætning
$(C,+,\cdot)$ er en udvidelse af $(R,+,\cdot)$.

Bevis: Vi skal vise (se side 8), at *C* indeholder *R*, og at summen og produktet af to reelle tal ikke ændres, selvom man opfatter tallene som komplekse. At *R* er en delmængde af *C* følger af:

$$a\in R \Rightarrow a=(a,0)\in C.$$

Lad nu *a* og *b* være to vilkårlige elementer i *R*. Så er deres komplekse sum

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0+0)=(a+b,0)=a+b,$$

mens de to tals komplekse produkt er

$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab-0\cdot 0, a\cdot 0+0\cdot b)=(ab,0)=ab.$$

I begge tilfælde ses, at resultaterne stemmer med, hvad man ville få, dersom man havde brugt de reelle regneoperatorer. Hermed er det bevist, at $(C,+,\cdot)$ er en udvidelse af $(R,+,\cdot)$.

Sætning
Et vilkårligt komplekst tal kan skrives på formen $a+ib$, hvor $a\in R$ og $b\in R$.

Bevis: Lad *z* være et vilkårligt komplekst tal. Så findes der ifølge definitionen af de komplekse tal to reelle tal *a* og *b*, således at $z=(a,b)$. Med disse betegnelser gælder:

$$\begin{aligned}
&a+ib \\
&=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0) && \text{(per definition)} \\
&=(a,0)+(0\cdot b-1\cdot 0, 0\cdot 0+1\cdot b) && \text{(definitionen af multiplikation)} \\
&=(a,0)+(0,b) && (R \text{ er et legeme}) \\
&=(a+0,0+b) && \text{(definitionen af addition)} \\
&=(a,b) && (R \text{ er et legeme}) \\
&=z
\end{aligned}$$

Hermed er det ønskede bevist.

Sætning
$i^2=-1$

Bevis: En simpel udregning giver:

$$\begin{aligned}
&i^2 \\
&=i\cdot i && \text{(per definition)} \\
&=(0,1)\cdot(0,1) && \text{(per definition)} \\
&=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0) && \text{(definitionen af multiplikation)} \\
&=(-1,0) && (R \text{ er et legeme}) \\
&=-1 && \text{(per definition)}
\end{aligned}$$

hvilket skulle vises.

Bemærkning
Dette afslutter analysen af de algebraiske konsekvenser af definitionen på side 33. Ved hjælp af logiske ræsonnementer og på et rent abstrakt grundlag har vi bevist, at de komplekse tal er et legeme. Dermed er en eventuel tvivl, om hvorvidt intuitionen skulle have spillet os et puds, fjernet.

Øvelser og eksempler

Eksempel
Andengradsligningen

$$3x^2 + 5x + 4 = 0$$

har diskriminanten

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 25 - 48 = -23 = 23 \cdot i^2 .$$

Derfor er løsningerne til ligningen givet ved:

$$\frac{-5 \pm \sqrt{23 \cdot i^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{23} \cdot i}{6} = \frac{-5}{6} \pm \frac{\sqrt{23}}{6} \cdot i$$

Øvelse 11
Afprøv hver af de to løsninger i foregående eksempel ved efter tur at indsætte dem i ligningens venstre side og reducere udtrykket.

Øvelse 12
Løs andengradsligningerne:

a) $x^2 + x + 1 = 0$

b) $-4x^2 + 2x - 5 = 0$

c) $x^2 + 16 = 0$

d) $x^2 - ix + 2 = 0$

e) $x^2 - ix = 0$

Øvelse 13
a) Bevis, at $(3+i)^2 = (-3-i)^2 = 8 + 6i$.

b) Benyt (a) til at løse andengradsligningen $x^2 + (3-i)x - 3i = 0$.

c) Afprøv de fundne løsninger ved indsættelse i ligningen.

Eksempel
Ligningen

$$(3+4i)x + 4 - 2i = 0$$

kan løses således:

$$(3+4i)x+4-2i=0$$
$$\Leftrightarrow (3+4i)x=-4+2i$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4+2i}{3+4i}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{(-4+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-12+16i+6i+8}{3^2-(4i)^2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4+22i}{9+16}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4+22i}{25}$$
$$\Leftrightarrow x=-0{,}16+0{,}88i$$

Øvelse 14
Afprøv løsningen i foregående eksempel ved indsættelse i ligningen.

Øvelse 15
Løs ligningerne:

a) $(1+3i)x+5+2i=0$

b) $(2+i)x-8+i=0$

c) $3-ix=0$

d) $(x^2-3)(x^2+1)=0$

e) $(4+2i)(x-1)=-3+7i$

Øvelse 16
Bevis, at hvis $a+ib$ er et vilkårligt komplekst tal, så er $(a+ib)(a-ib)$ et ikke-negativt reelt tal.

Øvelse 17
Fire ofte benyttede funktioner er defineret ved:

Konjugering:	$\forall a+ib\in C: \overline{a+ib}=a-ib$
Realdelen:	$\forall a+ib\in C: \mathrm{Re}(a+ib)=a$
Imaginærdelen:	$\forall a+ib\in C: \mathrm{Im}(a+ib)=b$
Længden:	$\forall a+ib\in C: \lvert a+ib\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$

Beregn følgende størrelser:

a) $\overline{3+2i}$

b) $\mathrm{Re}(3+2i)$

c) $\mathrm{Im}(3+2i)$

d) $\lvert 3+2i\rvert$

e) $(3+2i)+\overline{(3+2i)}$

f) $(3+2i)-\overline{(3+2i)}$

g) $(3+2i)\cdot\overline{(3+2i)}$

h) $(3+2i):\overline{(3+2i)}$

Øvelse 18
Bevis, med betegnelserne fra den foregående øvelse, at:

a) $\forall z \in C: z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

b) $\forall z \in C: \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$

c) $\forall z \in C: \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

d) $\forall z \in C: \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Øvelse 19
Bevis, med betegnelserne fra de foregående øvelser, at:

a) $\forall z \in C: z\cdot\overline{z} = |z|^2$

b) $\forall z \in C \setminus \{0\}: \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Øvelse 20
Find et trediegradspolynomium, som har rødderne $3+i$, $3-i$ og 5.

Øvelse 21
Vi skal løse ligningen:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$$

a) Bevis, at 2 er en løsning til ligningen.

b) Find samtlige løsninger til ligningen.

Øvelse 22
Løs ligningerne:

a) $x^3 + x = 0$

b) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

c) $x^3 = 1$

d) $x^4 = 1$

Appendiks

Uddrag af Caspar Wessels afhandling

Caspar Wessels afhandling kan findes i Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, København, 1799. Afhandlingens matematiske indhold er opdelt i 71 paragraffer, hvoraf de første 10 er gengivet nedenfor. Stavemåden og tildels opstillingen er søgt bevaret som i den originale artikel bortset fra, at denne er sat med gotiske typer.

Om
Directionens analytiske Betegning,
et Forsøg,
anvendt fornemmelig
til
plane og sphæriske Polygoners Opløsning.
Af
Caspar Wessel, Landmaaler.

Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Directionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier burde udtrykkes, naar af een eneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction.

For nogenledes at kunne besvare dette Spørgsmaal, lægger jeg til Grundvold to Sætninger, der synes mig unegtelige. Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles. Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Hensigt til de øvrige Problemet være uopløseligt. Dette er vel ogsaa Grunden, hvorfor ingen dermed har befattet sig*. Man har uden Tvivl holdt det for utilladeligt at forandre noget i Operationernes eengang antagne Forklaring. Og derimod er intet at indvende, saalænge Forklaringen anvendes paa Størrelser i Almindelighed; men i enkelte Tilfælde, naar Størrelsernes egen Natur synes at indbyde til Operationernes nøiere Bestemmelse, og denne med Nytte kan anvendes, bør samme vel ei kaldes utilladelig; thi gaaer man fra Arithmetiken over til den geometriske Analysis, eller fra Operationer med abstracte Tal til dem med rette Linier, faaer man Størrelser at betragte, der vel kan tage imod samme, men ogsaa imod langt flere Relationer, end de, som Tallene kan have til hinanden; om man derfor nu tager Operationerne i en vidtløftigere Mening, og ei, som før, blot indskrænker dem til den Brug, at kunne foretages med Linier af samme eller modsat Retning, men udstrækker nu deres forrige indskrænkede Begreb noget videre, saa at det bliver

* Uden det skulde være Magister Gilbert i Halle, hvis Priisskrivt over Calculus Situs maaskee indeholder en Forklaring over dette Æmne.

anvendeligt, ei alene i samme Fald som før, men ogsaa i uendelig mange flere Tilfælde; jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; men man udfører den kun videre, lemper sig efter Størrelsernes Natur, og iagttager den Methodens Regel, der fordrer, lidt efter lidt at giøre en vanskelig Lære fattelig. Det bliver altsaa ingen urimelig Fordring, at Operationerne anvendte i Geometrien tages i en vidtløftigere Mening, end den man i Regnekunsten gav dem; man vil ogsaa let tilstaae, at det paa den Maade maa være muelig at frembringe uendelig mange Forandringer i Liniernes Retning. Men just derved opnaaes (som siden skal bevises) ei alene, at alle umuelige Operationer kan undflyes, og den paradoxe Sætning, at det Muelige maa undertiden søges ved umuelige Midler, kan oplyses, men ogsaa at Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler. Og da det synes upaatvivleligt, at geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes, og underkastes de algebraiske Operationsregler, end naar den ved Figurer, og kun i enkelte Tilfælde, skal forestilles: saa synes det ei alene tilladeligt, men endog gavnligt, at betiene sig af Operationer, der udstrækkes til flere Linier, end de ligestilte (de af samme Retning) og de modsatte. Paa grund heraf søger jeg

I.) Først at bestemme Reglerne for saadanne Operationer;

II.) Dernæst vises ved et Par Exempler deres Anvendelse, naar Linierne ere i samme Plan;

III.) Derefter bestemmes Directionen af Linier i forskellige Planer ved en ny Operationsmethode, der ikke er algebraisk;

IV.) Ved Hielp af denne udfindes saavel plane som sphæriske Polygoners Opløsning i Almindelighed;

V.) Tilsidst udledes paa samme Maade de i den sphæriske Trigonometrie bekiendte Formler.

Dette er Hovedindholdet af denne Afhandling. Anledningen dertil var, at jeg søgte en Methode, hvorved de umuelige Operationer kunde undgaaes, og da denne var funden, anvendte jeg samme, for at overbevises om nogle bekiendte Formlers Almindelighed. Disse første Undersøgelser havde Hr. Etatsraad Tetens den Taalmodighed at giennemlæse, og denne navnkundige Lærdes Opmuntringer, Raad og Veiledning skylder jeg, saavel at dette Skrivt nu fremkommer mindre ufuldkomment, som og at det er værdiget, at optages i Samlingen af de Kongelige Videnskabernes Selskabs Skrivter.

I.

Paa hvad Maade af givne rette Linier ved de algebraiske Operationer formeres andre, og fornemmelig hvad Retning og Tegn disse skal have.

Der gives homogene Størrelser, hvilke, naar de faae Sted hos samme Subject, forøge eller formindske hinanden paa den Maade alene, som Incrementer og Decrementer.

Der gives andre, som i samme Tilfælde kunne forandre hinanden paa utallige flere Maader. Af disse sidste Slags ere Rette Linier.

Saaledes kan et Puncts Afstand fra et Plan paa utallige Maader forandres derved, at Punctet beskriver udenfor Planet en meer eller mindre inclineret ret Linie.

Er nemlig denne Linie perpendicular, det er, giør Punctets Vei en ret Vinkel med Planets Arel, saa bliver Punctet i Planets Parallel, og dets Vei har ingen Virkning paa dets Afstand fra Planet.

Er den beskrevne Linie indirect, det er, gør den en skiev Vinkel med Planets Arel, saa bidrager den et mindre Stykke end sin egen Længde til Afstandens Forlængning eller Forkortning, og kan paa uendelig mange Maader forøge eller formindske Afstanden.

Er den direct, det er i Linie med Afstanden, tillægger eller fratager den samme sin hele Længde, og er i første Fald positiv, i andet privativ.

Alle de rette Linier, som af et Punct kan beskrives, ere altsaa, i Hensigt til deres Virkning paa Punctets givne Afstand fra et udenfor Linierne opstilt Plan, enten directe eller indirecte, eller perpendiculare*, alt eftersom de tillægge eller fratage Afstanden saa meget som det Hele, eller en Deel, eller intet af deres Længde.

Da en Størrelse kaldes absolut, for saavidt den ei ved Relation til en anden, men umiddelbar antages given, saa kan i foregaaende Definitioner Afstanden kaldes den absolute Linie, og den relatives Bidrag til den absolutes Forlængning eller Forkortning kan kaldes den relatives Virkning.

Der gives endnu flere Størrelser end rette Linier, der kunne tage imod omtalte Relationer. Det var derfor ikke unyttigt, at forklare disse Relationer i Almindelighed, og at indlemme deres almindelige Begreb i Operationernes Forklaring; men da baade Kienderes Raad, dette Skrivts Indhold, og Foredragets Tydelighed fordre, ei at besvære Læseren med saa abstracte Begreb, befatter jeg mig kun med de geometriske Forklaringer alene, og siger derfor, at

§. 1.

To rette Linier adderes, naar man først føier dem sammen, saaledes at den ene begynder, hvor den anden slipper, derefter drager fra de sammenføiedes første til sidste Punct en ret Linie, og antager saa denne for de sammenføiedes Sum.

Gaaer f. Ex. et Punct 3 Fod frem, og derefter 2 Fod tilbage, saa er disse to Veies Sum ikke de første 3 og sidste 2 Fod sammenføiede; men een Fod frem er Summen, for saavidt denne Vei, af samme Punct beskreven, har samme Virkning, som begge de to andre Veie.

Ligeledes naar en Triangels ene Side strækker sig fra a til b, og den anden fra b til c, maa den tredie fra a til c kaldes Summen, og maa betegnes ved $ab+bc$ saa at ac og $ab+bc$ have samme Betydning, eller $ac = ab+bc = -ba+bc$, dersom ba er det modsatte af ab. Ere de adderte Linier directe, stemmer Definitionen fuldkommen overeens med den sædvanlige. Ere de ikke directe, strider det dog ikke mod Analogien, at kalde en ret Linie to andre sammenføiedes Sum, for saavidt den har samme Virkninger, som disse. Den Betydning, jeg har givet tegnet +, er heller ikke saa usædvanlig; f. Ex. i den Expression $ab+\frac{ba}{2}=\frac{1}{2}ab$ er $\frac{ba}{2}$ ingen Deel af Summen. Man kan derfor ogsaa sætte $ab+bc=ac$, uden derfor at tænke sig bc som nogen Deel af ac; $ab+bc$ er kun det Tegn, hvorved ac forestilles.

§. 2.

Naar flere end to rette Linier skal adderes, følges samme Regel; de forenes nemlig, saa at førstes sidste Punct sammenføies med det første af den anden, dennes sidste med tredies første o. s. v., derefter drages fra det Punct, hvor første begynder, til det, hvor sidste slipper, en ret Linie, og denne kaldes Summen af dem alle.

Hvad for en Linie, der skal tages for den første, og hvilken for den anden, tredie o. s. v., er ligegyldigt; thi paa hvad Sted indenfor tre Planer, der giør rette Vinkler med hinanden, en ret Linie af et Punct beskrives, har denne Linie samme Virkning paa Punctets Afstand fra hver af Planerne; følgelig bidrager een af flere adderte Linier til Positionens Bestemmelse af Summens sidste Punct ligesaa meget, naar den er den første, som naar den er den sidste, eller hvad anden Orden den har til de andre adderte; følgelig er Ordenen i rette Liniers Addition ligegyldig, og Summen bliver alletider den samme, fordi dens første Punct antages given, og det sidste faaer alletider samme Position.

Derfor kan ogsaa i dette tilfælde Summen betegnes ved de adderte Linier forbundne med hinanden ved Tegnet +. Naar i en Fiirkant f. Ex. den første Side er dragen fra a til b, den anden fra b til c, den tredie fra c til d, men den fierde fra a til d: saa kan sættes $ad=ab+bc+cd$.

§. 3.

* Indifferente var mere passende, om det ikke skurrede for meget i uvante Øren.

Er summen af flere Længder, Breder og Høider = 0, saa er Summen af Længderne, den af Brederne, og den af Høiderne, hver især = 0.

§. 4.

Productet af to rette Linier maa i alle Maader kunne formeres af den ene Factor, som den anden er formeret af den positive eller absolute Linie, der sættes = 1, det er:

Først maa Factorerne være af den Direction, at de begge kan optages i samme Plan som den positive Unitet.

Dernæst maa i Hensigt til Længden Productet forholde sig til den ene Factor, som den anden til Uniteten; og

Endelig, dersom man giver den positive Unitet, Factorerne og Productet et fælles første Punct, skal Productet i Hensigt til Retning ligge i omtalte Unitets og Factorers Plan, og afvige fra den ene Factor ligesaa mange Grader, og til samme Side, som den anden Factor afviger fra Uniteten, saa at Productets Directionsvinkel, eller Afvigning fra den positive, bliver saa stor som Summen af Factorernes Directionsvinkler.

§. 5.

Lad +1 betegne den positive retlinede Unitet, og $+\varepsilon$ en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af $+1 = 0$, af $-1 = 180°$, af $+\varepsilon = 90°$, af $-\varepsilon = -90°$ eller $270°$; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes, bliver $(+1)\cdot(+1) = +1$, $(+1)\cdot(-1) = -1$, $(-1)\cdot(-1) = +1$, $(+1)\cdot(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1)\cdot(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = +1$, $(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = -1$.

Hvoraf sees at ε bliver $= \sqrt{-1}$, og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei een eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.

§. 6.

Cosinus til en Cirkelbue, der begynder fra det sidste Punct af dens Radius +1, er det Stykke af samme, eller modsatte Radius, der begynder fra Centrum, og endes perpendicular udfor Buens sidste Punct. Sinus til samme Bue drages perpendicular paa Cosinus fra sammes sidste Punct til sidste af Buen.

I Følge §. 5 er altsaa Sinus til en ret Vinkel $= \sqrt{-1}$. Lad sættes $\sqrt{-1} = \varepsilon$; lad v betegne en Vinkel, hvilken som helst; og lad $\sin.v$ bemærke en ret Linie af samme Længde som Vinkelen v's Sinus, men positiv, naar Vinkelens Maal endes i første halve Omkreds, og negativ, naar det endes i den sidste halve: saa følger af §. 4 og 5, at $\varepsilon\sin.v$ udtrykker Vinkelen v's Sinus baade i Hensigt til Direction og Længde.

§. 7.

I Overensstemmelse med §. 1 og 6 er den Radius, som begynder fra Centrum, og afviger fra den absolute eller positive Unitet Vinkelen v, saa stor som $\cos.v + \varepsilon\sin.v$. Men i Følge §. 4 skal Productet af to Factorer, hvoraf den ene afviger fra Uniteten Vinkelen v, og den anden Vinkelen u, afvige fra samme Unitet Vinkelen $v + u$. Altsaa naar den rette Linie $\cos.v + \varepsilon\sin.v$ multipliceres med den rette Linie $\cos.u + \varepsilon\sin.u$, bliver Productet en ret Linie, hvis Directionsvinkel er $v + u$. Følgelig kan Productet efter §. 1 og 6 betegnes ved $\cos.(v + u) + \varepsilon\sin.(v + u)$.

§. 8.

Dette Product $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)\cdot(\cos.u+\varepsilon\sin.u)$ eller $\cos.(v+u)+\varepsilon\sin.(v+u)$ kan endnu udtrykkes paa en anden Maade, nemlig ved at addere i een Sum de partielle Producter, som udkomme, naar hver af de adderte Linier, hvis Sum udgiør den ene Factor, multipliceres med hver af dem, hvis Sum udgiør den anden. Saaledes bliver $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)\cdot(\cos.u+\varepsilon\sin.u) = \cos.v\cdot\cos.u-\sin.v\cdot\sin.u+\varepsilon(\cos.v\cdot\sin.u+\cos.u\cdot\sin.v)$ i Følge de to bekiendte trigonometriske formler cos.(v+u) = cos.v·cos.u–sin.v·sin.u, og sin.(v+u) = cos.v·sin.u+cos.u·sin.v. Disse to Formler kan med Nøiagtighed og uden stor Vidtløftighed bevises for alle Tilfælde, enten hver af Vinklerne v og u, eller een alene er positiv, negativ, større eller mindre end en ret. De Sætninger, som af samme to Formler udledes, har følgelig ogsaa deres Almindelighed.

§. 9.

Cos. v+εsin.v er i Følge §. 7 en Cirkels Radius, hvis Længde er = 1, og Afvigning fra $\cos.0°$ er Vinkelen v; Deraf følger at $r.\cos.v + r.\sin.v$ betegner en ret Linie, hvis Længde er r, og hvis Directionsvinkel er = v; thi naar en retvinklet Triangels Catheter bliver r gange større, saa bliver ogsaa Hypothenusen r gange større, og Vinklerne uforandrede; men Catheternes Sum er i Følge §. 1 saa stor som Hypothenusen, altsaa er r·cos.v+r·εsin.v = r(cos.v+εsin.v). Dette er altsaa et almindeligt Udtryk for enhver ret Linie, der ligger med Linierne $\cos.0°$ og $\varepsilon\sin.90°$ i samme Plan, afviger fra $\cos.0°$ Graderne v, og har Længden r.

§. 10.

Betegne a, b, c, d directe Linier af hvilken Længde som helst, positive eller negative, og de to indirecte $a + \varepsilon b$ og $c + \varepsilon d$ ligge i samme Plan som den absolute Unitet; saa kan deres Product findes, endogsaa naar deres Afvigning fra den absolute Unitet er ubekiendt; man behøver nemlig kun at multiplicere enhver af de adderte Linier, der udgiøre den ene Sum, med enhver af dem, som udgiøre den anden, saa vil disse Producter adderte udgiøre det søgte Product baade i Henseende til Længden og Retningen; saa at $(a + \varepsilon b)\cdot(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$.

Beviis. Lad Liniens a+εb Længde være A, og Afvigning fra den absolute Unitet v Grader; men Liniens c+εd Længde = C, og Afvigning = u: saa er, i Følge §. 9, a+εb = A·cos.v+A·εsin.v, og c+εd = C·cos.u+C·εsin.u, altsaa a = A·cos.v, b = A·εsin.v, c = C·cos.u, d = C·εsin.u (§. 3); men i Følge §. 4 er (a+εb)·(c+εd) = A·C·[cos.(v+u)+εsin.(v+u)] = A·C·[cos.v·cos.u–sin.v·sin.u +$\varepsilon(\cos.v\cdot\sin.u + \cos.u\cdot\sin v)$] §. 8. Følgelig, naar isteden for A·C·cos.v·cos.u sættes a·c, isteden for A·C·sin.v·sin.u b·d, o. s. v.: udkommer det, som skulde bevises.

Hvoraf følger, at skiøndt Summens adderte Linier ei alle ere directe, saa behøves dog ingen Undtagelse i den bekiendte Regel, hvorpaa Æqvationernes Theorie, og den om hele Functioner og deres Divisores simplices grunder sig, nemlig at naar to Summer skal multipliceres med hinanden, da maa enhver af de adderte Størrelser i den ene Sum multipliceres med enhver af de adderte i den anden. Man kan altsaa være forvisset om, at naar en Æqvation angaaer rette Linier, og dens Radix har den Form $a + \varepsilon b$: da betegnes derved en indirect Linie. Men vilde man multiplicere med hinanden rette Linier, som ikke begge kunde ligge i samme Plan med den absolute Unitet: maatte omtalte Regel tilsidesættes. Dette er Aarsagen, hvorfor jeg forbigaaer saadanne Liniers Multiplication. En anden Maade at betegne deres forandrede Retning forekommer i det følgende, §. 24-35.

Litteratur

Kirsti Andersen: *Hvor kommer vektorerne fra?*
Foreningen Videnskabshistorisk Museums Venner. 1988.

Viggo Brun: *Regnekunsten i det gamle Norge.*
Universitetsforlaget. Oslo 1962.

S. A. Christensen: *Caspar Wessel og de komplekse Tals Teori.*
Odense Katedralskoles program, 1897.

Green: *The historical development of complex numbers.*
Math. Gazette, vol 60, No 412. June 1976.

Poul Heegaard: *Caspar Wessel.*
Dansk biografisk Leksikon.

Henrik Meyer: *Digterens broder.*
Kronik i Politiken, 2-1-1943.

Kirsti Møller Pedersen: *Caspar Wessel og de komplekse tals repræsentation.*
Normat, nr. 27, 1979, side 49-55.

Caspar Wessel: *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning.*
Det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Nye Samling, V, 1799, side 469-518.